MVA101 – corrigé du devoir n°2

Exercice 1

Soit la suite de fonctions f_n définies sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = n \sin x \cos^n x$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

$f_n(x) = n e^{n\ln(\cos x)} \sin x$

- $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[,\quad 0 < \cos x < 1$, ce qui entraîne *ln(cosx)* < 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
- Pour $x = 0$ ou $\pi/2$, $f_n(x) = 0$, ce qui entraîne aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

On en conclut que la suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle.

2. L'entier *n* étant fixé, calculer le tableau de variation de $f_n(x)$ puis déterminer M_n, le maximum de | $f_n(x)$ | sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Calculons la dérivée de f_n **:**

$$f_n'(x) = n^2(\cos x)^{n-1}(-\sin^2 x) + n(\cos x)^{n+1} = n(\cos x)^{n+1}(1 - n\tan^2 x)$$

Si l'on met de côté le cas $x = \pi/2$ où $f_n(x) = 0$, la dérivée $f_n'(x)$ s'annule si $\tan^2 x = \frac{1}{n}$.

Pour calculer la valeur de la fonction en ce point appelé α, utilisons quelques formules trigonométriques afin de déduire cos α et sin α à partir de tan α.

On sait que

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

Donc cos² α = $\frac{n}{n+1}$, ce qui implique $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{1}{n+1}$

On peut maintenant calculer M_n :

$$M_n = f_n(\alpha) = n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

3. Étudier la convergence de la suite numérique (M_n) quand *n* tend vers +∞.

Cherchons un équivalent de M_n :

$$M_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}e^{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{n}{\sqrt{n+1}}e^{\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \sim \frac{n}{\sqrt{n}}e^{\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que la limite de la suite numérique (M_n) quand *n* tend vers +∞ est la limite de $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}}$, à savoir +∞

4. La convergence de la suite (f_n) est-elle uniforme ?

Il s'ensuit que la convergence n'est pas uniforme puisque $\lim_{n\to+\infty} \sup\left|f_n(x) - 0\right| \neq 0$.

__**Exercice 2**__

On considère l'équation différentielle (E):

$$x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4 - x \qquad \text{(E)}$$

On cherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution.

1. **Par quelle relation de récurrence sont liés les coefficients a_n d'une série solution ?**

$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ se dérive en $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, puis en $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Reportons dans l'équation différentielle (E):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 4 - x$$

La dernière somme réindexée devient $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1}$ et peut plus aisément s'ajouter aux deux premières sommes. Cela donne, an sortant le terme constant :

$$2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n + 2na_n - a_{n-2}\right)x^{n-1} = 4 - x$$

Identifions degré par degré :

Termes constants :	$2a_1 = 4$
Termes de degré 1 :	$6a_2 - a_0 = -1$
Termes de degré *n*-1 :	$n(n-1)a_n + 2na_n - a_{n-2} = 0$

D'où en particulier la relation de récurrence, pour tout *n* > 2:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

2. Que vaut a_1 ?

$2a_1 = 4$ donc $a_1 = 2$

3. Quel est le rayon de convergence d'une série solution ?

$\left|\frac{a_n x^n}{a_{n-2}x^{n-2}}\right| = \left|\frac{x^2}{n(n+1)}\right| \to 0$ quand *n* tend vers l'infini.

Cela montre que le rayon de convergence d'une série solution est infini.

4. Déterminer les séries entières solutions en fonction de a_0 et calculer leur somme.

Calculons les a_n par récurrence, en séparant le cas des *n* pairs et celui des *n* impairs.

$$a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{(2p+2)(2p+1)} = \frac{a_{2p-3}}{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)} = ... = \frac{a_1}{(2p+2)(2p+1)........3} = \frac{2a_1}{(2p+2)!}$$

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+1)(2p)} = \frac{a_{2p-4}}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)} = ... = \frac{a_2}{(2p+1)......4} = \frac{6a_2}{(2p+1)!} = \frac{a_0 - 1}{(2p+1)!}$$

On en déduit que les solutions développables en série entière sont de la forme :

$$y = a_0 + (a_0 - 1)\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!} + 4\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+2)!}$$

Remarque :

On sait que l'on a

$$chx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad shx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

On peut donc écrire les solutions sous la forme :

$$y = a_0 + (a_0 - 1)\left(\frac{shx - x}{x}\right) + 4\left(\frac{chx - 1}{x}\right)$$

5. **Préciser la solution telle que *y*(0) = 1.**

Comme $y(0) = a_0$, la solution recherchée est obtenue pour $a_0 = 1$, ce qui donne :

$$y = 1 + 4\frac{chx - 1}{x}$$

****