DEVOIR MAISON N°2

Exercice 1

a) Soit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

Le but est d'écrire ce terme général u_n sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$

Pour cela, on effectue une première intégration par partie ; en posant.

$$u'(x) = e^{-x} \Rightarrow u(x) = -e^{-x}$$
$$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$$

$$\text{Donc } u_n = \underbrace{\left[-e^{-x}\sin(x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}}_{=0} + \overbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos(x)\,dx}^{I}$$

On effectue une deuxième intégration par parties sur le terme. I :

On pose : $u'(x) = e^{-x} \Rightarrow u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = \cos(x) \Rightarrow v'(x) = -\sin(x)$

$$\text{Donc } I = \left[-e^{-x}\cos(x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx}_{u_n}$$

$$\Leftrightarrow I = \left(-e^{-(n+1)\pi}\cos((n+1)\pi) + e^{-n\pi}\cos n\pi\right) - u_n$$

$$\Leftrightarrow I = \left(-e^{-n\pi}.e^{-\pi}\times(-1)^{n+1} + e^{-n\pi}.(-1)^n\right) - u_n$$

car $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

$$\Leftrightarrow I = \left(e^{-n\pi}(-1)^n\left(-e^{-\pi}\times(-1)+1\right)\right) - u_n$$

$$\Leftrightarrow I = \left(e^{-n\pi}.(-1)^n.(e^{-\pi}+1)\right) - u_n$$

$$\text{Donc } u_n = I \Leftrightarrow u_n = e^{-n\pi}.(-1)^n(e^{-\pi}+1) - u_n$$

$$\Leftrightarrow 2u_n = (-1)^n \times \left(e^{-n\pi}(e^{-\pi}+1)\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = (-1)^n \times \underbrace{\boxed{\frac{e^{-n\pi}(e^{-\pi}+1)}{2}}}_{a_n}$$

Donc u_n s'écrit sous la forme $(-1)^n \times a_n$ avec (a_n) une suite réelle positive ($e^{-\pi} > 0$, $e^{-n\pi} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$) et décroissante (car $e^{-n\pi}$ décroit lorsque n tend vers $+\infty$) et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$

b) $\cdot\ u_0 = (-1)^0 \times \dfrac{e^{-0\times\pi}\,(e^{-\pi}+1)}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{u_0 = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}}$

$\cdot\ u_n = (-1)^n \times e^{-n\pi}\overbrace{\dfrac{(e^{-\pi}+1)}{2}}^{u_0}$

$\Leftrightarrow u_n = (-1)^n \cdot e^{-n\pi} \times u_0$

$\Leftrightarrow \boxed{u_n = (-e^{-n\pi}) \cdot u_0} = \boxed{(-e^{-\pi})^n \cdot u_0}$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $\boxed{q = -e^{-\pi}}$.

c) On cherche ici $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, c'est à dire la somme d'une série géométrique

Or la somme d'une série géométrique est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = u_0 \times \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}}$$

$$= \frac{(e^{-\pi}+1)}{2} \times \frac{1-(e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}}$$

Quand n tend vers l'infini on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\cancel{(e^{-\pi}+1)}}{2} \times \frac{1-0}{\cancel{(1+e^{-\pi})}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} (e^{-\pi})^n = 0\right)$$

Exercice 2

a) $f_n(t) = \dfrac{nt}{1+nt}$, $t \in [0,1]$.

• si $t=0$, alors $f_n(t) = f_n(0) = 0$ et donc $f_n(t) \longrightarrow f(t) = 0$

• si $t \in]0,1]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nt}{nt} = 1$. Donc $f_n(t) \to f(t) = 1$

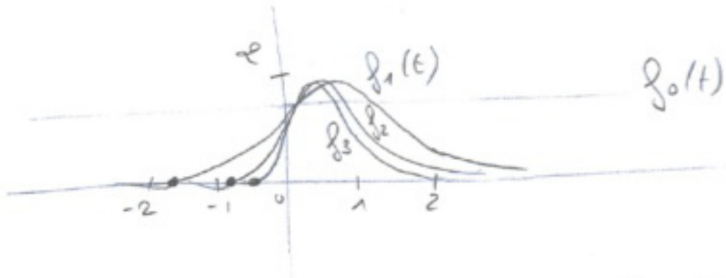
Au final, $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ quand $n \to +\infty$ avec :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t=0 \\ 1 \text{ si } t \in]0,1] \end{cases} \qquad \text{(convergence simple)}$$

b) (f_n) tend simplement vers une fonction f qui n'est pas continue (discontinuité en $t=0$), donc (f_n) ne peut pas converger uniformément vers $f(t)$

Exercice 3

a) Tracé de quelques fonctions f_n (pour $n=0,1,2$ et 3) :



Recherche des valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_n(t) = 0$:

$f_n(t) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + nt)e^{-n^2t^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} + nt = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = \dfrac{-\sqrt{2}}{n}}$ (car $e^{-n^2t^2} \neq 0 \ \forall n, \forall t$)

Étude du sens de variation des fonctions f_n :

$f_n'(t) = ne^{-n^2t^2} + (-2n^2\sqrt{2}\, t e^{-n^2t^2} - 2n^3t^2e^{-n^2t^2})$

$f_n'(t) = ne^{-n^2t^2}\underbrace{(1 - 2n\sqrt{2}\, t - 2n^2t^2)}_{P_n(t)}$

Le polynôme $P_n(t)$ du second degré possède 2 racines : $t_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+2}{2n}$ et $t_2 = \dfrac{-\sqrt{2}-2}{2n}$

t	$-\infty$		t_2		t_1		$+\infty$
$f_n'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

b) $f_n(t) = (\sqrt{e} + nt)\,e^{-n^2t^2}$

- pour $t=0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{e}+0)\times 1 = \sqrt{e}$
- pour $t\neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{e}+nt)\cdot e^{-n^2t^2} = 0$

d'après le théorème des croissances comparées

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\boxed{f(t) = \begin{cases} \sqrt{e} & \text{pour } t=0 \\ 0 & \text{pour } t\neq 0 \end{cases}}$

c) La suite de fonctions (f_n) ne peut pas converger uniformément vers f car la limite f présente une discontinuité en $t=0$.