MVA101 **Analyse et Calcul Matriciel** **2014-2015**

CONTRÔLE du 11 Février 2015
Corrigé

Exercice 1 : Séries entières.

1. On considère la série entière :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)}$$

1.(a) Pour déterminer son rayon de convergence R_1 on pose

$$a_n = \frac{1}{n-2}$$

alors le rapport

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-2}{n-1} \to 1, \qquad \text{si } n \to \infty,$$

et la Règle de d'Alembert nous dit que $R_1 = 1$.
1.(b) Pour $x = 1$ on a la série à terms positifs

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)}$$

dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$. Donc elle est divergente.

Pour $x = -1$ on a la série alternée

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)},$$

La valeur absolue du terme général décroît vers 0. Donc elle est convergente.
1.(c) On a que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)} = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

on reconnaît donc le dénveloppement en série entière de $-x^2 \ln(1-x)$ sur $]-1, 1[$.
2. On considère la série entière :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)}$$

2.(a) Comme dans le point **1.(a)** on utilise la Règle de d'Alemebert pour montrer que $R_2 = 1$.
2.(b) On a que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}.$$

Comme pour le point **1.(c)** on reconnaît le dénveloppement en série entière suivant

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \text{pour } x \in]-1, 1[,$$

et donc

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)} = -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}.$$

3. On considère la série entière :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$$

3.(a) Comme dans le point **1.(a)** on utilise la Règle de d'Alemebert pour montrer que $R_3 = 1$.
3.(b) On utilise une décomposition en éléments simples et on a que

$$\frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-2}\right).$$

Donc on obtient, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-2}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2} \\
&= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\ln(1-x) - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) - \frac{x^2}{3}\ln(1-x) \\
&= \frac{(1-x^3)\ln(1-x)}{3x} + \frac{1}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{9}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

4. Afin de déterminer la somme de la série numérique

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)(n-2)},$$

il suffit de poser $x = 1/2$ dans (1) pour obtenir

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)(n-2)} = -\frac{7\ln(2)}{12} + \frac{4}{9}.$$

Exercice 2 : Série de Fourier.

On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2x}{\pi} & \text{pour } x \in]-\pi, 0], \\ 1 - \dfrac{2x}{\pi} & \text{pour } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

On reconnaît que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (l'ensemble des réels sauf les multiples de π). En plus f est une fonction paire.

1. Comme f est paire $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

On calcul a_0 qui est

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)dx = 0$$

Et pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)dx \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx}_{=0} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&\overset{IPP}{=} -\frac{4}{n\pi^2}\underbrace{[x\sin(nx)]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= -\frac{4}{n^2\pi^2}[\cos(nx)]_0^{\pi} = -\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Donc

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{(2p+1)^2\pi^2} & \text{si } n = 2p+1 \\ 0 & \text{si } n = 2p. \end{cases}$$

La Série de Fourier de f est

$$S(f)(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux, par le Théorème de convergence uniforme sa Série de Fourier converge uniformément (et donc simplement) vers $S(f)(x)$. En plus on a

$$S(f)(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

3. Il suffit de poser $x = 0$ dans l'égalité (2) pour obtenir

$$1 = f(0) = S(f)(0) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 3 : Transformée de Fourier. [1]

On considére la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

On note que

$$f'(x) = -2xf(x). \tag{3}$$

1. On a que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ et que $f'(x) = -2xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Donc

$$\mathcal{F}(f')(u) = iu\mathcal{F}(f)(u).$$

D'autre part la fonction $x \mapsto xf(x)$ est L^1 sur $\mathbb{R}$ donc

$$\frac{d}{du}\mathcal{F}(f(x))(u) = -i\mathcal{F}(xf(x))(u).$$

Donc en appliquant la transformée de Fourier à l'équation (3) on a que

$$\frac{d}{du}\mathcal{F}(f(x))(u) = -\frac{u}{2}\mathcal{F}(f)(u). \tag{4}$$

Or on va noter, pour simplicité $F(u) = \mathcal{F}(f)(u)$, et on résout (4) pour $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F'(u) = -\frac{u}{2}F(u) &\iff \frac{F'(u)}{F(u)} = -\frac{u}{2} \\ &\iff \int_0^u \frac{F'(v)}{F(v)}dv = -\frac{u^2}{4} \\ &\iff \ln\left(\frac{F(u)}{F(0)}\right) = -\frac{u^2}{4} \\ &\iff F(u) = F(0)e^{-\frac{u^2}{4}}. \end{aligned}$$

Du fait que $F(0) = \mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\sqrt{\pi}$ on obtient

$$\mathcal{F}(f)(u) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{u^2}{4}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

1. Cet exercice a été présenté en cours le 7 janvier 2015.

2. On calcul la transformée de Fourier de $\tilde{h}(x) = h(ax)$ et on a pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\tilde{h})(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(ax)e^{-iux}dx$$

en faisant la substitution $y = ax$, d'où $\frac{1}{a}dy = dx$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{h})(u) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)e^{-i\frac{uy}{a}}dy \\ &= \frac{1}{a}\mathcal{F}(h)\left(\frac{u}{a}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

3. Il suffit d'observer que

$$\phi(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} f\left(\frac{x}{2c}\right)$$

et en utilisant (6) avec $a = \frac{1}{2c}$ on a

$$\mathcal{F}(\phi)(u) = 2c\mathcal{F}\left(\frac{1}{2c\sqrt{\pi}}f\right)(2cu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(f)(2cu).$$

Enfin grâce à (5) on obtient

$$\mathcal{F}(\phi)(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(f)(2cu) = e^{-c^2u^2}.$$

Exercice 4 : Transformée de Laplace.

1. On considére la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2, \end{cases}$$

et on en calcul la Tranformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 e^{-pt}dt \\ &= \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_1^2 \\ &= \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}. \end{aligned} \tag{8}$$

En particulier l'abscisse de convergence est 0.

2. On commence en faisant une décomposition en éléments simples pour trouver l'identité

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Or, on sait, que

$$\frac{1}{p} = \mathcal{L}(u(t))(p), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p+1} = \mathcal{L}(e^{-t}u(t))(p),$$

où $u(t)$ est la fonction echelon définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{L}((1-e^{-t})u(t))(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

3. Pour le Théorème du retard on a que

$$\mathcal{L}((1-e^{-(t-1)})u(t-1))(p) = \frac{e^{-p}}{p(p+1)},$$

et que

$$\mathcal{L}((1-e^{-(t-2)})u(t-2))(p) = \frac{e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

D'où

$$\mathcal{L}((1-e^{-(t-1)})u(t-1) - (1-e^{-(t-2)})u(t-2))(p) = \frac{1}{p(p+1)}e^{-p} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-2p}. \tag{9}$$

4. On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = f(t), \quad t > 0; \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Pour simplicité on va noter $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$. On a que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'(t) + y(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) &\iff pY(p) - \underbrace{y(0)}_{=0} + Y(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) \\ &\iff Y(p) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(p)}{p+1}. \end{aligned}$$

Grâce à (8) on a

$$\mathcal{L}(y(t))(p) = \frac{1}{p(p+1)}e^{-p} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-2p}$$

5. D'après (9) on a que la solution $y(t)$ de (10) est donnée par

$$y(t) = (1-e^{1-t})u(t-1) - (1-e^{2-t})u(t-2).$$