MVA101 **Analyse et Calcul Matriciel** **2015-2016**

CONTRÔLE du 10 Février 2016

Corrigé

Exercice 1 : Séries numériques.

(i) La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2},$$

est absolument convergente d'après le critère déquivalence car

$$\left|\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\right| = \frac{1}{1-4n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

En particulier elle est convergente.

(ii) La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-n}$$

est une série à termes positifs. On peut donc utiliser le critère de comparaison avec

$$e^{-n} \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n} e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série est donc convergente.

(iii) On considère la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right).$$

On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

En particulier la série est à termes positifs. On utilisera le critère d'équivalence avec

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$$

ce qui nous donne que la série est divergente.

Exercice 2 : Séries entières.

(i) Pour déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$$

on peut utiliser le critère de d'Alembert et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} = 1$$

donc $R = 1$. Pour $x = 1$ la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

est convergente (série de Riemann de paramétre 2). Par consequence la série converge absolument pour $x = -1$.

(ii) Pour déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) x^n$$

on peut utiliser le critère de comparaison sachant que $\sin(n) \leq 1$. Donc $R \geq 1$. Or pour $x = 1$ la suites des termes générales $\sin(n)$ n'a pas de limite, en particulier ne tend pas vers 0. Ainsi $R = 1$. La suite est divergente en $x = -1$ pour la même raison.

Exercice 3 : Série de Fourier.
On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \qquad \text{pour } x \in]-\pi, \pi].$$

1.
La fonction f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Or

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) dx = \frac{1}{2\pi} \left(2\frac{\pi^3}{3} - 2\pi^3 \right) = -\frac{2}{3}\pi^2.$$

Pout tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx - \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 \cos(nx) dx}_{=0} \\
&= \frac{2}{\pi n} \underbrace{[x^2 \sin(nx)]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\
&= \frac{4}{\pi n^2} [x \cos(nx)]_0^{\pi} - \underbrace{\frac{8}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} \\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

La Série de Fourier de f est

$$S(f)(x) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux, par le Théorème de convergence uniforme sa Série de Fourier converge uniformément (et donc simplement) vers $S(f)(x)$. En plus on a

$$S(f)(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

3. On pose $x = \pi$ dans l'égalité (1) pour obtenir

$$0 = f(\pi) = S(f)(\pi) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sinon on pose $x = 0$ dans l'égalité (1) pour obtenir

$$-\pi^2 = f(0) = S(f)(0) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 4 : Transformée de Fourier
Trouver la transformée de Fourier de la fonction

$$x^2 e^{-a|x|},$$

sachant que

$$\frac{d^p}{du^p}\mathcal{F}(f)(u) = (-i)^p \mathcal{F}(x^p f(x))(u),$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On a que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-a|x|})(u) &= \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{ixu} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{ixu} dx \\
&= \frac{1}{a+iu} + \frac{1}{a-iu} \\
&= \frac{2a}{a^2+u^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x^2 e^{-a|x|})(u) &= -\frac{d^2}{du^2}\mathcal{F}(e^{-a|x|})(u) \\
&= -\frac{d^2}{du^2}\frac{2a}{a^2+u^2} \\
&= -4a\frac{d}{du}\frac{u}{(a^2+u^2)^2} \\
&= -4a\frac{(a^2+u^2)^2+4u^2}{(a^2+u^2)^3}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Transformée de Laplace et Algèbre linéaire
(les 4 questions suivantes sont indépendantes)

1. On utilise la méthode de Gauss pour résoudre le système linéaire suivant en fonction du paramètre $p \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{cases} (3-p)X - 5Y & = 1 \\ X - (3+p)Y & = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (3-p)X - 5Y & = 1 \\ \qquad (p^2-4)Y & = 5-2p \end{cases}$$

Donc pour $p = 2$ ou $p = -2$ le système n'a pas des solutions. Si $p \neq \pm 2$ on a une solution unique qui est

$$X = \frac{7-p}{p^2-4} \quad \text{et} \quad Y = \frac{5-2p}{p^2-4}.$$

2. Trouver la fonction ayant pour transformée de Laplace :

$$p \mapsto \frac{7-p}{p^2-4}.$$

On commence en faisant une décomposition en éléments simples pour trouver l'identité

$$\frac{7-p}{p^2-4} = \frac{5}{4}\frac{1}{p-2} - \frac{9}{4}\frac{1}{p+2}.$$

Or, on sait, que

$$\frac{1}{p-2} = \mathcal{L}(e^{2t}u(t))(p), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p+2} = \mathcal{L}(e^{-2t}u(t))(p),$$

où $u(t)$ est la fonction echelon définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{L}\left((5e^{2t} - 9e^{-2t})u(t)/4\right)(p) = \frac{7-p}{p^2-4}.$$

3. Trouver la fonction ayant pour transformée de Laplace :

$$p \mapsto \frac{5-2p}{p^2-4}.$$

On commence encore une fois en faisant une décomposition en éléments simples pour trouver l'identité

$$\frac{5-2p}{p^2-4} = \frac{1}{4}\frac{1}{p-2} - \frac{9}{4}\frac{1}{p+2}.$$

Comme dans le point précedent on peut conclure que

$$\mathcal{L}\left((e^{2t} - 9e^{-2t})u(t)/4\right)(p) = \frac{5-2p}{p^2-4}.$$

4. Le dernier point est consequence directe des points précedents.