MVA101 **Analyse et Calcul Matriciel** **2014-2015**

CONTRÔLE du 11 Février 2015
Durée : 3h
CALCULATRICES, TÉLÉPHONES, ORDINATEURS, TABLETTES INTERDITS
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS

Il est demandé de bien justifier ses réponses. Les exercices suivants sont indépendants. Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

Exercice 1 : Séries entières.

1. On considère la série entière :
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)}$$
   (a) Déterminer son rayon de convergence R_1 ;
   (b) étudier la convergence de la série en $x = R_1$ et $x = -R_1$;
   (c) déterminer sa somme sur $]-R_1, R_1[$.
2. On considère la série entière :
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)}$$
   (a) Déterminer son rayon de convergence R_2 ;
   (b) déterminer sa somme sur $]-R_2, R_2[$.
3. On considère la série entière :
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$$
   (a) Déterminer son rayon de convergence R_3 ;
   (b) déterminer sa somme sur $]-R_3, R_3[$ [1]
4. Déterminer la somme de la série numérique
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)(n-2)}$$

Exercice 2 : Série de Fourier.
On considère la fonction 2π-périodique définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2x}{\pi} & \text{pour } x \in]-\pi, 0], \\ 1 - \dfrac{2x}{\pi} & \text{pour } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f ;
2. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme) ;
3. Calculer la valeur de la série numérique :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

1. suggestion : on peut utiliser les résultat aux points 1.(c) et 2.(b)

Exercice 3 : Transformée de Fourier.
On considére la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

On note que

$$f'(x) = -2xf(x). \tag{1}$$

1. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1), montrer que la transformée de Fourier de f est solution de l'équation différentielle

$$y'(u) = -\frac{u}{2}y(u).$$

Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en déduire que

$$\mathcal{F}(f)(u) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{u^2}{4}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $a > 0$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{h}(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{h}(x) = h(ax)$. Montrer, á l'aide de la définition de transformée de Fourier, que

$$\mathcal{F}(\tilde{h})(u) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(h)\left(\frac{u}{a}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

3. Déduire, des points 1. et 2., la transformée de Fourier de

$$\phi(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4c^2}}$$

pour $c > 0$.

Exercice 4 : Transformée de Laplace.
On considére l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = f(t), \quad t > 0; \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où f est la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Laplace de f et préciser l'abscisse de convergence.
2. Trouver [2] la fonction dont la transformée de Laplace est

$$p \mapsto \frac{1}{p(p+1)}.$$

3. En déduire, à l'aide du théorème du retard, la fonction dont la transformée de Laplace est

$$p \mapsto \frac{1}{p(p+1)}e^{-p} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-2p}.$$

4. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle (2), déterminer l'équation algébrique vérifiée par $\mathcal{L}(y)(p)$. Déterminer $\mathcal{L}(y)(p)$.
5. Déduire la solution y de l'équation différentielle (2), donner l'expression de y. La fonction y est-elle continue ?

---

2. Suggestion : faire une décomposition en éléments simples