

CONTRÔLE du 15 Avril 2015

Durée : 3h

CALCULATRICES, TÉLÉPHONES, ORDINATEURS, TABLETTES INTERDITS
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS

Il est demandé de bien justifier ses réponses. Les exercices suivants sont indépendants. Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet (2) en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

Exercice 1 : Séries entières.

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes et étudier, le cas échéant, la série quand $x = R$ et $x = -R$:

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n, \quad (iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{3^n} x^n,$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n \sqrt{n}} x^n, \quad (iv) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{4^n + 1}} x^n.$$

Exercice 2 : Série de Fourier.

On considère la fonction 2π -périodique définie par :

$$f(x) = e^x, \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi[.$$

1. Déterminer la série de Fourier exponentielle de f ;¹
2. Déterminer la série de Fourier trigonométriques de f ;²
3. Calculer la valeur de la série numérique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Exercice 3 : Transformée de Fourier.

1. Montrer que si une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est paire alors

$$\mathcal{F}(f)(u) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(ut) dt.$$

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$D_a(t) = \begin{cases} a - |t| & \text{si } |t| \leq a, \\ 0 & \text{si } |t| > a, \end{cases}$$

pour $a > 0$.

3. Tracer les graphes de $D_a(t)$ et $\mathcal{F}(D_a)(u)$.

1. trouver les coefficients c_n pour $n \in \mathbb{Z}$ et écrire la série.
2. trouver les coefficients a_n et b_n et écrire la série. *Suggestion : on peut utiliser le résultat du point 1. de cet exercice*

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Discuter et résoudre selon les valeurs du paramètre réel m , le système linéaire

$$\begin{cases} x & +my & +z & = 1 \\ mx & +y & +(m-1)z & = m \\ x & +y & +z & = m+1 \end{cases}$$

Exercice 5 : Transformée de Laplace.

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = 2 \sin(2t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$