le cnam
école sciences industrielles & technologies de l'information

T. Horsin

Contrôle du 1/12/2014. Durée 1h30.
Notes de cours et ed autorisées, y compris le poly de notes de cours.
Calculatrice autorisée mais inutile.

1 Exercice

A l'aide d'une ou deux intégrations par parties calculer les intégrales suivantes:

$$\int_{1/2}^{1} x\ln(x)dx, \int_{1/2}^{1} x^2\ln(x)dx, \int_{0}^{\pi} x^2\sin(x)dx.$$

$$\int_{1/2}^{1} x\ln(x)dx = [(x^2/2)\ln(x)]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{x}{2}dx$$

$$\int_{1/2}^{x} x^2\ln(x)dx = [(x^3/3)\ln(x)]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{x^2}{3}dx.$$

$$\int_{0}^{\pi} x^2\sin(x)dx = [-x^2\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\cos(x)dx.$$

Puis

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)dx.$$

2 Exercice

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables: On rappelle que $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\int_0^{\pi}\sin^2(x)\cos(x)dx, \int_0^{\pi/4}\tan^2(x)(1+\tan^2(x))dx.$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2(x)\cos(x)dx = [\frac{\sin^3(x)}{3}]_0^{\pi}.$$

$$\int_0^{\pi/4}\tan^2(x)(1+\tan^2(x))dx = [\frac{\tan^3(x)}{3}]_0^{\pi/4}.$$

3 Exercice

On considère la fonction $f(x) = x^2 \ln(x)$.

i. Déterminer $\mathscr{D}_f$. $]0, +\infty[$.

ii. Montrer que $f'(x) = x(2\ln(x)+1)$. En déduire les variations de f. $f'(x) > 0 \iff 2\ln(x)+1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

iii. Montrer que $f(1/x) = -\dfrac{\ln(x)}{x^2}$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$. $f(1/x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(1/x) = -\dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(1/x) = 0$.

iv. Tracer la courbe représentative de f.