

MVA010**Bases de l'analyse mathématiques**

Première session d'examen

*Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.***Exercice 1** (6 Points)On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } 2u_{n+1} = u_n - 1, \text{ pour tout } n.$$

- 1) Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n) .
- 2) Soit (v_n) la suite numérique définie, pour tout entier n , par $v_n = u_n + a$ où a est un nombre réel.
 - a) Déterminer le nombre a tel que (v_n) soit une suite géométrique. Quelle est alors la raison de (v_n) ? son premier terme ?
 - b) Déterminer une expression de v_n en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- 3) Déterminer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 2 (7 points)On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) La fonction est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?
- 2) Calculer la dérivée de f lorsqu'elle existe.
- 3) Donner le tableau des variations de f .
- 4) La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes ? Si oui, les préciser.
- 5) Donner l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 3 (6 points)

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes

$$I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$$

1) On rappelle que pour tout x réel $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

En posant $t = \pi - x$ montrer que :

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(x) dx$$

En déduire la valeur de I .

2) Retrouver la valeur de $I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 4 (4 points)

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y(x) - 6y'(x) = 2 \quad (E)$$

- 1) Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.
- 2) Déterminer les constantes a et b telles que $y_0(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation complète (E) .
- 3) En déduire la solution générale de l'équation complète (E) , puis celle qui vérifie la condition $y(0) = 1$.

★ ★ ★ ★ ★ ★