CNAM – Paris Juin 2008

MVA010

Bases de l'analyse mathématiques

première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Soit la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, avec $u_0 = \dfrac{3}{2}$.

(a) Donner les trois premiers termes de cette suite.

(b) On admet que u_n est différent de 1 pour tout n.
Vérifier que la suite $V_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est une suite géométrique.
Déterminer sa limite. En déduire celle de la suite u_n.

(c) A-t-on les mêmes résultats si l'on prend comme premier terme $u_0 = 2$?

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = x\,e^x - 1$.

(a) Dériver la fonction f et établir son tableau de variations.

(b) Quelle est la pente de la tangente au point d'abscisse $x = 0$?

(c) Y a-t-il une asymptote ? un point d'inflexion ?

(d) On note x_0 le réel tel que $f(x_0) = 0$. Vérifier, sans le calculer, que $x_0 \in \,]0;1[$.
(*On rappelle que* $e \simeq 2,718$).

(e) Dessiner la courbe représentative de f.

(f) Déduire l'étude de $g(x) = \ln(xe^x - 1)$ de celle de f.

(g) La fonction g admet-elle une fonction réciproque ?

Exercice 3

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y(x) - 2\,y'(x) = 1 \qquad (*)$$

(a) Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.

(b) Déterminer les constantes a et b telles que $y_0(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation complète $(*)$.

(c) En déduire la solution générale de l'équation complète $(*)$.

(d) Déterminer, parmi toutes les solutions, celle qui vérifie la condition $y(0) = 2$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆