MVA107 - Devoir n°5

à rendre au plus tard le samedi 11 janvier 2014

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir

MVA107	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*)
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1

On se place dans $(\mathbb{R}^3; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ vu dans les exercices précédents.

On suppose que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

On considère le champs vectoriel $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}$ défini sur $(\mathbb{R}^*)^3$.

On prend la surface (Σ) ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, orientée positivement vers l'extérieur, avec $0 < a < b < c$.

1°) Vérifier que (Σ) admet la paramétrisation suivante:
$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\phi \\ y = b\sin\theta\sin\phi \\ z = c\cos\phi \end{cases} \quad \text{avec } (\theta,\ \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \text{On posera } \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2°) Calculer $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\phi}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}$, et la normale $\overrightarrow{\mathcal{N}}$ à (Σ), normale orientée vers l'extérieur de (Σ).

3°) Calculer $< \overrightarrow{V} \,|\, \overrightarrow{\mathcal{N}} >$, produit scalaire euclidien de $\overrightarrow{V}$ par $\overrightarrow{\mathcal{N}}$, en fonction des variables Θ et ϕ.

4°) Calculer le flux du champs vectoriel $\overrightarrow{V}$ à travers la surface (Σ).

Exercice 2

On considère le domaine $(\mathscr{D})$ de $\mathbb{R}^3$ et la fonction $f(x, y, z)$ définis par:

$(\mathscr{D}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x^2 + y^2 \leqslant 1;\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$;

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x - 1$

1°) En utilisant le passage en coordonnées cylindriques, calculer
$I = \displaystyle\iiint_{(\mathscr{D})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$

On considère le champs de vecteurs $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ 0 \\ z(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}$

On note (S) la surface fermée (orientation extérieure) limitant le domaine $(\mathscr{D})$.

2°) En appliquant une formule appropriée du cours, calculer $\Phi(\overrightarrow{V})$ flux (sortant) de $\overrightarrow{V}$ à travers (S).

3°) Que remarque-t-on?

✯✯✯✯✯✯