

MVA107 - Devoir n°1

à rendre au plus tard le vendredi 18 octobre 2013

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir

MVA107	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (6 chiffres)
Votre groupe d'ED : ... (jour, heure, salle)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1

On considère les matrices suivantes de $M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MD\}$

1°) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

2°) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.

Démontrer que: $(M \in E) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ et } y = t)$

3°) Démontrer que (U, A) = une base de E et déterminer $\dim(E)$.

Exercice 2

Soient u et v les applications qui, à toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe les fonctions $u(P)$ et $v(P)$, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned} u(P)(x) &= -2P(x) + 2xP'(x) \\ \text{et } v(P)(x) &= 2xP(x) - x^2P'(x) \end{aligned}$$

1°) Démontrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$.

2°) Démontrer que $u \circ v - v \circ u = 2v$.

3°) Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que:

$$u \circ v^n - v^n \circ u = 2nv^n \text{ où } v^n = \underbrace{v \circ v \circ \dots \circ v}_{n \text{ fois}}$$