

## MVA903

## Corrigé du devoir n°4

**Exercice 1**

1°)  $\frac{d^2z}{dx^2} - 10\frac{dz}{dx} + 25z = 0$  On pose  $z(x) = e^{rx}$  où  $r =$  une constante  $\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = re^{rx} \text{ et } \frac{d^2z}{dx^2} = r^2e^{rx};$$

soit en remplaçant:  $r^2e^{rx} - 10re^{rx} + 25e^{rx} = 0$ , en divisant par  $e^{rx} > 0$ , on a:

$$r^2 - 10r + 25 = 0 \quad \text{i.e.} \quad (r - 5)^2 = 0$$

donc  $r_1 = r_2 = 5 \Rightarrow z(x) = (Ax + B)e^{5x}$  où  $A$  et  $B$  sont 2 constantes que nous trouverons plus loin.

2°)  $y_p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p'(x) = 2ax + b \Rightarrow y_p''(x) = 2a$ . Soit en remplaçant:

$$2a - 10(2ax + b) + 25(ax^2 + bx + c) = 25x^2 + 5x + 17$$

$$2a - 20ax - 10b + 25ax^2 + 25bx + 25c = 25x^2 + 5x + 17$$

$$(25a)x^2 + (25b - 20a)x + 2a - 10b + 25c = 25x^2 + 5x + 17$$

$$25a = 25 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$25b - 20a = 5 \quad \text{i.e.} \quad 25b = 20a + 5 = 25 \text{ donc } \boxed{b = 1}$$

$$\text{et enfin } 2a - 10b + 25c = 17 \quad \text{i.e.} \quad 2 - 10 + 25c = 17 \quad \text{i.e.} \quad 25c = 10 - 2 + 17 = 25 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{c = 1}$$

Donc, on obtient:  $y_p(x) = x^2 + x + 1$

3°) On a donc:  $y(x) = z(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{5x} + (x^2 + x + 1)$

Avec  $y(0) = 1$ , on a:  $1 = B + 1 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{B = 0}$

$\Rightarrow y(x) = Axe^{5x} + x^2 + x + 1$  On calcule  $y'(x)$ :

$$y'(x) = Ae^{5x} + Ax5e^{5x} + 2x + 1 = (A + 5Ax)e^{5x} + 2x + 1$$

Avec  $y'(0) = -1$ , on a:  $-1 = A + 1$  donc  $\boxed{A = -2}$

$\Rightarrow$  la solution de (E),  $y(x) = -2xe^{5x} + x^2 + x + 1$

☆☆☆☆☆