MVA903

Corrigé du devoir n°3

Exercice 1

1°) $-3z'(x)+2z(x)=0, \quad -3\dfrac{dz}{dx}+2z=0 \qquad z\neq 0, \quad 3\dfrac{dz}{dx}=2z, \quad \dfrac{dz}{z}=\dfrac{2}{3}dx$

$\displaystyle\int\frac{dz}{z}=\frac{2}{3}\int dx$ ie $\ln|z(x)|=\dfrac{2}{3}x+\ln|K|=\ln e^{\frac{2}{3}x}+\ln|K|=\ln|Ke^{\frac{2}{3}x}|$

$\Rightarrow z(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}$ où K est une constante réelle.

2°) On pose $y_p(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, et c sont trois constantes à trouver: $y_p'(x)=2ax+b$

$\Rightarrow -3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2+x-1$

$(2a)x^2+(2b-6a)x+(2c-3b)=x^2+x+1$

$2a=1, \quad a=\dfrac{1}{2}$

$2b-6a=1, \quad 2b-3=1, \quad 2b=4, \quad b=2$

$2c-3b=-1, \quad 2c-6=-1, \quad 2c=5, \quad c=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow y_p(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$

3°) Principe de juxtaposition ou superposition des solutions

$\Rightarrow \quad y_G(x)=z(x)+y_p(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}+\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$ avec $y(0)=1$, ceci donne $K+\dfrac{5}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad K=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ l'unique solution recherchée: $y(x)=-\dfrac{3}{2}e^{\frac{2}{3}x}+\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$

Exercice 2

1°) Domaine d'existence et d'étude $=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, $\mathbb{R}^*=I_1\cup I_2$

$xz'(x)-z(x)=0$ avec $z\neq 0$ et $x\neq 0$

$x\dfrac{dz}{dx}=z \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{z}=\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|z(x)|=\ln|x|+\ln|K|=\ln|Kx|$

$\Rightarrow z(x)=K_1x$ si $x>0$ et $z(x)=K_2x$ si $x<0$ *ie* $z(x)=\begin{cases}K_1x \text{ si } x>0\\ K_2x \text{ si } x<0\end{cases}$

2°) Nous allons utiliser la M.V.C. vue en cours en supposant $x\neq 0$.

On pose $y_p(x)=K(x)x \quad \Rightarrow \quad y_p'(x)=K'(x)x+K(x)$

$\Rightarrow \quad x\Big(K'(x)x+K(x)\Big)-\Big(K(x)x\Big)=x^2$

ie $\quad x^2K'(x)+\cancel{xK(x)}-\cancel{xK(x)}=x^2$

On simplifie par $x^2 \Rightarrow K'(x)=1 \Rightarrow K(x)=x \quad \Rightarrow \quad y_p(x)=x^2$

3°) On suppose les solutions $\Rightarrow \quad y_G(x) = y_p(x) + z(x) = \begin{cases} x^2 + K_1 x \text{ si } x > 0 \\ x^2 + K_2 x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

On suppose que $y(1) = -1$ *ie* on prend $x^2 + K_1 x$;

avec $x = 1$ on a: $1 + K_1 = -1 \Rightarrow K_1 = -2 \Rightarrow$ unique solution sur $\mathbb{R}_*^+$.

$y(x) = x^2 - 2x$, que l'on vérifie: $y'(x) = 2x - 2 \Rightarrow x(2x-2) - (x^2 - 2x) = 2x^2 - \cancel{2x} - x^2 + \cancel{2x} = x^2$. OK.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆

kalfaian@cnam.fr