MVA903

Corrigé du devoir n°1

Exercice 1 Calculs d'intégrales simples

1°) $|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ si } x \geqslant 3 \\ -x+3 \text{ si } x \leqslant 3 \end{cases}$

$I_1 = \int_2^3 (-x+3)dx + \int_3^6 (x-3)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^6 = \left(-\frac{9}{2}+9\right) - \left(-\frac{4}{2}+6\right) + \left(\frac{36}{2}-18\right) - \left(\frac{9}{2}-9\right)$
$= -\frac{9}{2}+9-4+\cancel{18}-\cancel{18}-\frac{9}{2}+9 = 18-4-9 = 18-13 = 5.$

2°) $3^x = e^{x\ln 3}$, $\frac{1}{3^x} = e^{-x\ln 3}$

$I_2 = \int_{-1}^{+1} e^{-(\ln 3)x}dx = \left[\frac{e^{-(\ln 3)x}}{-(\ln 3)}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{\ln 3}\left(e^{-\ln 3} - e^{\ln 3}\right) = -\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{e^{\ln 3}} - e^{\ln 3}\right) = -\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{3}-3\right) =$
$\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\ln 3} = \frac{8}{3\ln 3}.$

3°) $t = \sqrt{x+1}$, $t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2-1$ et $2tdt = dx$

$x = 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

$x = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$

$I_3 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{t^2-1-1}{\cancel{t}}\right) 2\cancel{t}dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^2-2)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 2\left(\left(\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}-2\sqrt{3}\right)-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)\right)$
$= 2\left(\left(\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{-4\sqrt{2}}{3}\right)\right) = 2\left(-\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$

4°) $t = 1+\cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$x = 0 \Leftrightarrow t = 1+1 = 2$

$x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 1+0 = 1$

$I_4 = \int_2^1 \frac{-dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \left[\ln|t|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

5°) $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

On pose: $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

et $v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3}$

$I_5 = \int_1^e x^2\ln x dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1}{3}\ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}\left(e^3-1\right)$
$= \frac{3e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

 kalfaian@cnam.fr

Exercice 2 Etude complète d'une fonction

$$g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

1°) $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ doit être > 0

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-2)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où, il faut prendre: $\mathcal{D}_f = \Big]-\infty, 1\Big[\cup \Big]2, +\infty\Big[$

2°) $g(x) = \ln\left(x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)\right) =$ (pour $x \neq 0$) $\ln(x^2) + \ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = 2\ln|x| + \ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$

(*) si $x \to +\infty$, $g(x) = 2\ln x + \ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme $\ln x$

on fait $\dfrac{g(x)}{x} = \underbrace{\dfrac{2\ln x}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}_{\to 0}$ (quand $x \to +\infty$)

donc $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *i.e.* il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe $x'Ox$ en $+\infty$.

(**) si $x \to -\infty$, $g(x) =)2\ln(-x) + \ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $g(x) \to +\infty$ comme $\ln(-x)$

On fait $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{2\ln(-x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = \underbrace{-\dfrac{2\ln(-x)}{(-x)}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}_{\to 0}$ (quand $x \to -\infty$)

donc $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ *i.e.* même conclusion qu'en $+\infty$ mais en $-\infty$.

(***) si $x \to 2^+$, $x - 2 \to 0^+$, $x - 1 \to 1 \Rightarrow (x-2)(x-1) \to 0^+ \Rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2) = g(x) \to -\infty$ *i.e.* $x = 2$ est asymptote verticale.

(****) si $x \to 1^-$, $x - 1 \to 0^-$, $x - 2 \to -1 \Rightarrow (x-2)(x-1) \to 0^+ \Rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2) = g(x) \to -\infty$ *i.e.* $x = 1$ est asymptote verticale.

3°) $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où on pose $u(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x - 3$ et $g'(x) = \dfrac{2x-3}{(x^2 - 3x + 2)}$ et $g'(x) < 0$ si $x < \dfrac{3}{2}$ et $g'(x) > 0$ si $x > \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$		//////		$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4°) $g(x) = \ln\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right) = \ln\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

On sait que $x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie si et seulement si pour tout x tel que $\frac{3}{2}+x$ appartienne à $\mathcal{D}_g$ on a $\frac{3}{2}-x \in \mathcal{D}_g$ et $g\left(\frac{3}{2}+x\right) = g\left(\frac{3}{2}-x\right)$

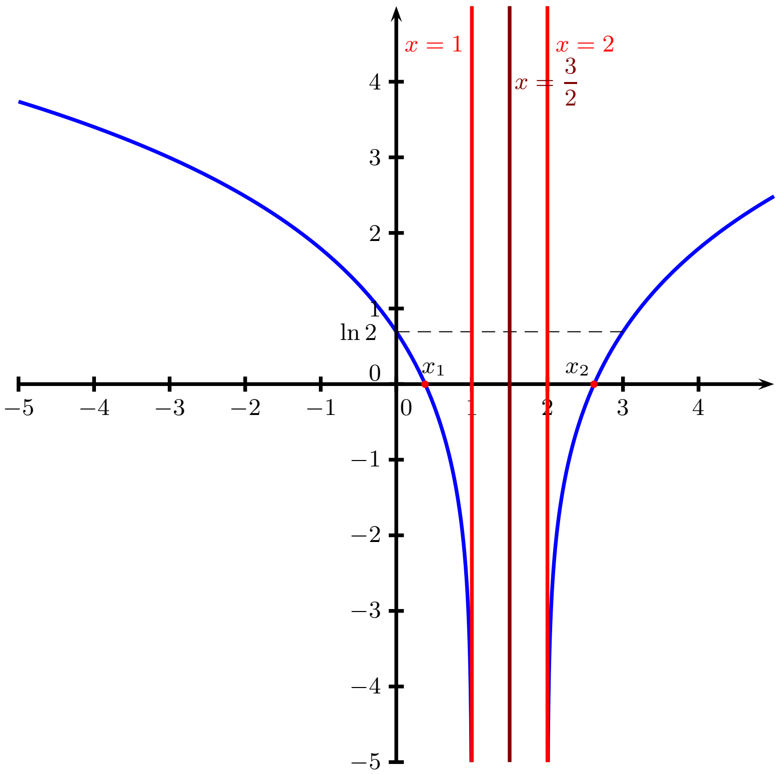
Calculons donc $g\left(\frac{3}{2}+x\right)$ et $g\left(\frac{3}{2}-x\right)$

(*) $g\left(\frac{3}{2}+x\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{2}+x\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}+x\right)+2\right) = \ln\left(\frac{9}{4} + \cancel{3x} + x^2 - \frac{9}{2} - \cancel{3x} + 2\right) = \ln\left(x^2 - \frac{9}{4} + 2\right) = \ln\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$

(**) $g\left(\frac{3}{2}-x\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}-x\right)+2\right) = \ln\left(\frac{9}{4} - \cancel{3x} + x^2 - \frac{9}{2} + \cancel{3x} + 2\right) = \ln\left(x^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2\right) = \ln\left(x^2 - \frac{9}{4} + 2\right) = \ln\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$

(***) Donc on a bien $g\left(\frac{3}{2}+x\right) = g\left(\frac{3}{2}-x\right)$ *i.e.* $x = \frac{3}{2}$ axe de symétrie.

5°)



(*) pour obtenir x_1 et x_2, on fait $g(x) = 0$ *i.e.* $\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln 1$ *i.e.* $x^2 - 3x + 2 = 1$ *i.e.* $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆

 kalfaian@cnam.fr