MVA107

Corrigé du devoir n°4

Exercice 1

1°) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

2°) $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 5-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)^2 = 0$

donne $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. toutes stictement positives, donc la signature de q est $(+,+,+)$ avec la notation q définie-positive.

.

3°)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} (-) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow 3x - 3y = 0 \\ \Rightarrow y = x \end{array}$$

$$x - z = 0 \Rightarrow z = x, x \neq 0$$

$$\Rightarrow E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = sep \text{ associé à } \lambda_1 = 3.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \{\ x + y + z = 0 \quad \text{plan vectoriel associé à } \lambda = 6, \text{ valeur propre double}$$

$$\Rightarrow E_6 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = sep \text{ associé à } \lambda_2 = \lambda_3 = 6.$$

Calculons des valeurs propres formant une bon de vecteurs propres de A.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6} \Rightarrow \theta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \Rightarrow \theta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P \in \mathbb{O}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } {}^tP = P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4°) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $A = P\,D\,P^{-1} = P\,D\,{}^tP$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On pose $Y = {}^tP\,X \Rightarrow {}^tY = {}^tX\,P$

$$q(x,y,z) = q(X) = {}^tX\,A\,X = {}^tX\,P\,D\,{}^tP\,X = ({}^tX\,P)\,D\,({}^tPX) = {}^tY\,D\,Y = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= 3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ie $\quad x' = l_1(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$

$y' = l_2(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+z)$

$z' = l_3(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$

Donc : $q(x,y,z) = 3\left(\frac{1}{3}(x+y+z)^2\right) + 6\left(\frac{1}{6}(x-2y+z)^2\right) + 6\left(\frac{1}{2}(x-z)^2\right) = (x+y+z)^2 + (x-2y+z)^2 + 3(x-z)^2$

5°) $q(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 & \Rightarrow & x=y=z=0 \\ x-2y+z=0 & \Rightarrow & x=y \\ x-z=0 & \Rightarrow & z=x \end{cases}$

$\Rightarrow$ le sous-ensemble est $\{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$ car q est définie-positive.

Exercice 2

1°) $f(x,y,z) = x - 2y + z \Rightarrow \overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{\text{Grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

kalfaian@cnam.fr

2°) la projection orthogonale sur (P) est l'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - \dfrac{< \overrightarrow{u} | \overrightarrow{N} >}{\left\| \overrightarrow{N} \right\|^2} \overrightarrow{N}$

où $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $p(\overrightarrow{u}) = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$ et $< \overrightarrow{u} | \overrightarrow{N} >= x - 2y + z$, $\left\| \overrightarrow{N} \right\|^2 = 6$.

D'où : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \left(\dfrac{x - 2y + z}{6} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{6}(x - 2y + z) \\ y + \frac{2}{6}(x - 2y + z) \\ z - \frac{1}{6}(x - 2y + z) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x + 2y - z \\ 2x + 2y + 2z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3°) D'où $A = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = I_3 - \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

✫✫✫✫✫✫

kalfaian@cnam.fr