# MVA107

## Corrigé du devoir n°3

**Exercice 1**

1°) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$

$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$

Donc $A^n = 0, \ \forall n \geqslant 3$.

2°) Les colonnes 1 et 2 de $A$ sont égales donc dét $A = 0$ donc $A$ non inversible et $\lambda = 0$ est valeur propre de $A$.

3°) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ \lambda & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \times (\lambda^2) = \lambda^3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ valeur propre triple..

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ -x - y + 2z & \Rightarrow \quad z = 0 \\ -2x - 2y = 0 & \Rightarrow \quad y = -x \ (x \neq 0) \end{cases}$$

prenons $x = 1 \Rightarrow E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad ie \qquad \dim E_0 = 1$

$\lambda = 0$ valeur propre triple (*ie* $m(0) = 3$) et dim $E_0 = 1$.

4°) $\lambda = 0$ valeur propre triple associée à un sous espace propre $E_0$ de dim 1 $\Rightarrow$ $A$ non diagonalisable.

5°) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a + b - 2c = 1 & \\ -a - b + 2c = -1 & \Rightarrow \quad c = -\dfrac{1}{2} \\ -2a - 2b = 0 & \Rightarrow \quad b = -a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ un vecteur non propre associé à la valeur propre triple 0 qui est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en prenant $a = 0$.

Nous allons construire un second vecteur non propre à partir de $\vec{u}$ en utilisant la technique en chaîne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ie \qquad \begin{cases} \alpha+\beta-2\gamma=0 \\ -\alpha-\beta+2\gamma=0 \\ -2\alpha-2\beta=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ et $2\gamma=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \gamma=\dfrac{1}{8}$, on peut alors prendre $\alpha=\beta=\dfrac{1}{8} \Rightarrow$ un vecteur non propre $\vec{v}=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

D'où une matrice de passage $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ -1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ dont l'inverse donne $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule alors $J=P^{-1}\,A\,P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien la réduite de Jordan associée à $A$.

6°) $J=D+N=N$ car $D=0 \Rightarrow J^n=N^n \Rightarrow$ on va calculer $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3=0 \Rightarrow N^k=0,\ \forall k \geqslant 3$.

Donc $J^n=0,\ \forall n\geqslant 3$ or $A=P\,J\,P^{-1} \Rightarrow A^n=P\,J^n\,P^{-1}=0,\ \forall n\geqslant 3$ (on retrouve $A^3=0$).

On vérifie pour $A^2$ avec $J^2=N^2$.

7°) $U_n=A^n\,U_0 \quad ie \quad U_1=A\,U_0, \quad U_2=A^2\,U_0 \quad$ et $\quad U_3=A^3\,U_0=0 \quad$ et $\quad U_n=0,\ \forall n\geqslant 3$

$$ie \quad U_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U_2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

1°) $$\text{dét}\,(M-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda)\Big((-\lambda)(-1-\lambda)-2\Big)=(-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$$

Donc le poca$(M)=P(X)=(-X)(X^2+X-2)=-X^3-X^2+2X=(-X)(X+2)(X-1)$

2°) Un poann$(M)$ permet d'avoir (Cayley-Hamilton) : $-M^3-M^2+2M=0=-M(M+2I_3)(M-I_3)$

3°) Les valeurs propres de $M$ : on a $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-2$ et $\lambda_3=1$

Donc $\text{Sp}(M)\subset\{0;-2;1\}$.

De plus, $\text{tr}(M)=0+0-1=-1=0+1-2=-1=$ somme des valeurs propres $\Rightarrow \text{Sp}(M)=\{0;-2;1\}$.

$\underline{\lambda_1=0}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow z_1=0 \text{ puis } x_1-y_1=0 \ ie\ y_1=x_1\neq 0$$

 kalfaian@cnam.fr

$\Rightarrow E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{\lambda_2 = -2}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} 2x_2 + z_2 = 0 & z_2 = -2x_2 \\ 2y_2 - z_2 = 0 & z_2 = 2y_2 \\ x_2 - y_2 + z_2 = x_2 & +x_2 - 2x_2 = 0,\ \forall x_2 \end{array} \qquad \Rightarrow y_2 = -x_2$$

$\Rightarrow E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{\lambda_3 = 1}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} -x_3 + z_3 = 0 & z_3 = x_3 \\ -y_3 - z_3 = 0 & y_3 = -z_3 = -x_3 \\ x_3 - y_3 - 2z_3 & x_3 + x_3 - 2x_3 = 0,\ \forall x_3 \end{array}$$

$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

4°) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}\,M\,P$ donc $M = P\,D\,P^{-1}$

Il faut trouver $P^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $M = P\,D\,P^{-1} \Rightarrow M^n = P\,D^n\,P^{-1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}. \qquad P\,D^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 1 \\ 0 & -(-2)^n & -1 \\ 0 & -2(-2)^n & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 1 \\ 0 & -(-2)^n & -1 \\ 0 & -2(-2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \end{pmatrix}$$

✩✩✩✩✩✩