MVA107

Corrigé du devoir n°2

Exercice 1

1°) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Nous avons 3 pivots $\neq 0$:
le 1er correspond au coefficient de x.
le 2e correspond au coefficient de y.
le 3e correspond au coefficient de t.

Donc nous aurons z qui sera un paramètre réel quelconque a priori.

$\Rightarrow t = -1$ puis $y - z + t = \dfrac{1}{5}$, $y - z = -t + \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$

ie $y = z + \dfrac{6}{5}$, $\forall z \in \mathbb{R}$ et enfin $x - 2y + z - t = -1$

ie $x = 2y - z + t - 1 = 2z + \dfrac{12}{5} - z - 1 - 1 = z + \dfrac{12}{5} - 2 = z + \dfrac{2}{5}.$

D'où les solutions de (S) : $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + \frac{2}{5} \\ z + \frac{6}{5} \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{R}$$

ie l'ensemble des solutions de (S) = une droite affine définie par $(A; \vec{u})$

avec $A \left| \begin{array}{c} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \\ -1 \end{array} \right.$ (un point $\in \mathbb{R}^4$) et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (un vecteur directeur $\in \mathbb{R}^4$)

Exercice 2

1°) Linéarité de f : $\mathcal{B}_C(\mathbb{R}_3[X]) = (1, X, X^2, X^3)$, $\mathcal{B}_C(\mathbb{R}^4) = (e_1, e_2, e_3, 4)$

où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculons $f(\tilde{0})$ = image du polynôme nul par $f = (0,0,0,0) = 0_{R^4}$

De plus, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$, $\forall (P_1, P_2) \in \Big(\mathbb{R}_3[X]\Big)^2$

kalfaian@cnam.fr

En effet : $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \Big((\lambda P_1 + \mu P_2)(1),\ (\lambda P_1 + \mu P_2)(2),\ (\lambda P_1 + \mu P_2)(3),\ (\lambda P_1 + \mu P_2)(4)\Big)$

$= \Big(\lambda P_1(1) + \mu P_2(1),\ \lambda P_1(2) + \mu P_2(2),\ \lambda P_1(3) + \mu P_2(3),\ \lambda P_1(4) + \mu P_2(4)\Big)$

$= \lambda\Big(P_1(1), P_1(2), P_1(3), P_1(4)\Big) + \mu\Big(P_2(1), P_2(2), P_2(3), P_2(4)\Big) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$

Donc $f-$stabilité par combinaison linéaire *ie* on a stabilité par combinaison linéaire par f donc f est linéaire car f va d'un espace vectoriel de dim4 $= \dim(\mathbb{R}_3[X]$ dans un espace vectoriel de dim4 $= \dim\mathbb{R}^4$, f est donc bien un endomorphisme d'espaces vectoriels (de dim $= 4$)

2°) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituant la $\mathcal{B}_C(\mathbb{R}^4)$

et $(1, X, X^2, X^3)$ la base $\mathcal{B}_C(\mathbb{R}_3[X]])$.

La matrice demandée aura en colonnes ; $f(1)$, $f(X), f(X^2)$ et $f(X^3)$ exprimés dans $\mathcal{B}_C(\mathbb{R}^4)$

Or : $\begin{aligned} f(1) &= (1,1,1,1) \\ f(X) &= (1,2,3,4) \\ f(X^2) &= (1,4,9,16) \\ f(X^3) &= (1,8,27,64) \end{aligned}$ D'où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$

3°) dét $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 6 & 42 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = 4 \times (21 - 18) = 4 \times 3 = 12 \neq 0$

Donc M^{-1} existe.

4°) Donc $M\,X = Y$ donne $X = M^{-1}\,Y$. On va calculer X par le pivot de Gauss *ie* en utilisant la méthode de la matrice augmentée de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{68}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Donc, par identification : $x_1 = 15$, $x_2 = -\dfrac{68}{3}$, $x_3 = 10$ et $x_4 = -\dfrac{4}{3}$.

☆☆☆☆☆☆