MVA107

Corrigé du devoir n°1

Exercice 1

$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$

$AM = MD$ si et seulement si $z = 0$ et $y = t$ *ie* $M = \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$

1°) $E \neq \emptyset$ car la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

$\forall (M_1, M_2) \in E^2, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $\lambda M_1 + \mu M_2 \in E$.

Or: $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 \\ \lambda z_1 & \lambda t_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & t_1 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}$ car $M_1 \in E$

$\mu M_2 = \begin{pmatrix} \mu x_2 & \mu y_2 \\ \mu z_2 & \mu t_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_2 & t_2 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ car $M_2 \in E$

$\Rightarrow \lambda M_1 + \mu M_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 & \lambda t_1 + \mu t_2 \\ 0 & \lambda t_1 + \mu t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & t_3 \\ 0 & t_3 \end{pmatrix}$

Donc E est un *sev* de $M_2(\mathbb{R})$ car non vide et stable par combinaison linéaire.

2°) C.F ci-dessus.

3°) On a prouvé que $\forall M \in E$, $M = xU + tA =$ donc M est bien une combinaison linéaire de U et A
ie $M \in$ Vect(U, A).

On va prouver que U et A sont indépendantes donc on aura alors une base de E et dim $E = 2$.

$\alpha U + \beta A = 0$ donne $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ donc on a bien indépendance linéaire par U et A.

Exercice 2

1°) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P(x) = ax^2 + bx + c \quad P'(x) = 2ax + b$

$u(P)(x) = -2(ax^2 + bx + c) + 2x(2ax + b) = -2ax^2 - \cancel{2bx} - 2c + 4ax^2 + \cancel{2bx} = 2ax^2 - 2c = Q(x)$ et $Q(x) \in \mathbb{R}_2[X]$

Donc $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$

Prouvons la linéarité de u:

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, nous avons $u(\lambda P_1 + \mu P_2)$ à valeur en $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda P_1+\mu P_2)(x) &= -2(\lambda P_1+\mu P_2)(x)+2x(\lambda P_1+\mu P_2)'(x) = -2(\lambda P_1(x)+\mu P_2(x))+2x(\lambda P_1'(x)+\mu P_2'(x)) \\ &= \lambda\Big(-2P_1(x)+2xP_1'(x)\Big)+\mu\Big(-2P_2(x)+2xP_2'(x)\Big) = \lambda u(P_1)(x)+\mu u(P_2)(x) \\ &= \Big(\lambda u(P_1)+\mu u(P_2)\Big)(x), \text{ et ce } \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad u(\lambda P_1+\mu P_2)=\lambda u(P_1)+\mu u(P_2) \quad$ *ie* $\quad$ la linéarité de u.

Même raisonnement pour v:

$v(P)(x)=2x(ax^2+bx+c)-x^2(2ax+b)=\cancel{2ax^3}+2bx^2+2cx-\cancel{2ax^3}-bx^2=bx^2+2cx=R(x)$ et $R\in\mathbb{R}_2[X]$

Donc $v:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$.

Pour la linéarité de v:

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \forall(P_1,P_2)\in(\mathbb{R}_2[X])^2$, nous devons évaluer $v(\alpha P_1+\beta P_2)$ en $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v(\alpha P_1+\beta P_2)(x) &= 2x(\alpha P_1+\beta P_2)(x)-x^2(\alpha P_1+\beta P_2)'(x) \\ &= 2x\alpha P_1(x)+2x\beta P_2(x)-\alpha x^2P_1'(x)-\beta x^2P_2'(x) \\ &= \alpha\Big(2xP_1(x)-x^2P_1'(x)\Big)+\beta\Big(2xP_2(x)-x^2P_2'(x)\Big) \\ &= \alpha\Big(v(P_1)(x)\Big)+\beta\Big(v(P_2)(x)\Big)=\Big(\alpha v(P_1)+\beta v(P_2)\Big)(x) \text{ et ce } \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad v(\alpha P_1+\beta P_2)=\alpha v(P_1)+\beta v(P_2) \quad$ *ie* $\quad$ la linéarité de v

2°) Déterminons pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X], \quad (u\circ v-v\circ u)(P)$

On a, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (u\circ v-v\circ u)(P)(x) &= u(v(P)(x))-v(u(P)(x)) \\ &= (-2v(P)(x)+2x(v(P)'(x))-(2xu(P)(x)-x^2(u(P)'(x))(x) \\ &= -2\Big(2xP(x)-x^2P'(x)\Big)+2x\Big(2P(x)+\cancel{2xP'(x)}-\cancel{2xP'(x)}-x^2P''(x)\Big) \\ &\quad -2x\Big(-2P(x)+2xP'(x)\Big)+x^2\Big(-\cancel{2P'(x)}+\cancel{2P'(x)}+2xP''(x)\Big) \\ &= -\cancel{4xP(x)}+2x^2P'(x)+\cancel{4xP(x)}-\cancel{2x^3P''(x)}+4xP(x) \\ &\quad -4x^2P'(x)-\cancel{2x^2P'(x)}+\cancel{2x^2P'(x)}+\cancel{2x^3P''(x)} \\ &= 4xP(x)-2x^2P'(x)=2v(P)(x) \text{ et ce } \forall P\in\mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ on a bien: $u\circ v-v\circ u=2v$

3°) Initialisation vraie pour $n=1$ puisque $u\circ v-v\circ u=2(1)v$

Admettons la relation au rang $n \quad$ *ie* $\quad u\circ v^n-v^n\circ u=2nv^n$

Evaluons $u\circ v^{n+1}-v^{n+1}\circ u=(u\circ v^n)\circ v-v(v^n\circ u)$;

Or par hypothèse, on a: $u\circ v^n=2nv^n+v^n\circ u \quad\Rightarrow$
$(u\circ v^n)\circ v=(2nv^n+v^n\circ u)\circ v=2nv^{n+1}+v^n\circ(u\circ v)$ et

$u\circ v=2v+v\circ u \quad\Rightarrow\quad u\circ v^{n+1}=2nv^{n+1}+v^n\circ(2v+v\circ u)=2nv^{n+1}+2v^{n+1}+v^{n+1}\circ u=2(n+1)v^{n+1}+v^{n+1}\circ u$

Donc: $u\circ v^{n+1}-v^{n+1}\circ u=2(n+1)v^{n+1} \quad$ *ie* $\quad$ la relation voulue au rang $(n+1)$.

Dès lors, la relation demandée est héréditaire $\quad$ *ie* $\quad$ valable $\forall n\in\mathbb{N}^\star$

☆☆☆☆☆