Corrigé du Devoir 4 MVA 107 2013-2014.

Exercice 1

1°) $q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz$

2°) $\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ 3-\lambda & 5-\lambda & -1\\ 3-\lambda & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} =$

$(3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)^2 = 0$ donne

$\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ toutes strictement positives, donc la signature de q est $(+,+,+)$ avec la notation . q définie-positive.

3°) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}2x-y-z=0\\ -x+2y-z=0\\ -x-y+2z=0\end{cases}\Big\}\ominus$ $3x-3y=0$

$y=x.$

$x-z=0 \Rightarrow z=x$

$x\neq 0.$

$\Rightarrow E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ = sep associé à $\lambda_1 = 3$.

$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\{\, x+y+z=0$ plan vectoriel associé à $\lambda=6$ valeur propre double

$\Rightarrow E_6 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ = sep associé à $\lambda_2=\lambda_3=6$

Calculons des vecteurs propres formant une bon de vecteurs propres de A

$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

③ $\Rightarrow P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP = P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

4°) $q(x,y,z) = (x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

avec $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ On pose $Y = {}^tPX$ $\Rightarrow {}^tY = {}^tXP$ $\quad q(x,y,z) = q(X) = {}^tXAX$

${}^tX = (x\ y\ z)$ $\quad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad = {}^tXPD\,{}^tPX =$

$({}^tXP)\,D\,({}^tPX) = {}^tYDY$

$= (x'\ y'\ z') \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2$

où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ie $x' = l_1(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$

$y' = l_2(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+z)$

$z' = l_3(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$.

Donc : $q(x,y,z) = 3\left(\frac{1}{3}(x+y+z)^2\right) + 6\left(\frac{1}{6}(x-2y+z)^2\right) +$

$6\left(\frac{1}{2}(x-z)^2\right) =$

$(x+y+z)^2 + (x-2y+z)^2 + 3(x-z)^2$

5°) $q(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 & \Rightarrow x = y = z = 0. \\ x-2y+z = 0 & \Rightarrow x = y \\ x - z = 0 & \Rightarrow z = x \end{cases}$

$\Rightarrow$ le sous-ensemble est $\{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$ car q est définie-positive

(3) Exercice 2

1°) $f(x,y,z) = x-2y+z \Rightarrow \vec{\nabla f} = \vec{\text{Grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

$\vec{N} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

2°) la projection orthogonale sur (P) est l'application

$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$p(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u} | \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$ où $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et

$p(\vec{u}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

et $\langle \vec{u} | \vec{N} \rangle = x - 2y + z$, $\|\vec{N}\|^2 = 6$

D'où : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \left(\frac{x-2y+z}{6}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} x - \frac{1}{6}(x-2y+z) \\ y + \frac{2}{6}(x-2y+z) \\ z - \frac{1}{6}(x-2y+z) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x+2y-z \\ 2x+2y+2z \\ -x+2y+5z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3°) D'où $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = I_3 - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$