Exercice 1

1°) $\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$$

Donc $A^n=0,\ \forall n\geq 3$. $\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2°) Les ~~colonnes~~ colonnes 1 et 2 de A sont égales donc $\det A=0$ donc A non inversible et $\lambda=0$ est valeur propre de A.

3°) $\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\-1&-1-\lambda&2\\-2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-2\\\lambda&-1-\lambda&2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}-1&1&-2\\1&-1-\lambda&2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=$

$\lambda\begin{vmatrix}-1&1&-2\\0&-\lambda&0\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2)=\lambda^3=0\Rightarrow\lambda=0$ valeur propre triple

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x+y-2z=0\\-x-y+2z=0\\-2x-2y=0\end{cases}\begin{matrix}\\ \Rightarrow z=0\\ \Rightarrow y=-x\\ x\neq 0\end{matrix}$$

prenons $x=1\Rightarrow E_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ ie $\dim E_0=1$

$\lambda=0$ valeur propre triple (ie $m(0)=3$) et $\dim E_0=1$.

4°) $\lambda=0$ valeur propre triple associée à un sous espace propre E_0 de dim 1 $\Rightarrow$ A non diagonalisable

5°) $\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b-2c=1\\-a-b+2c=-1\\-2a-2b=0\end{cases}\begin{matrix}\Rightarrow c=-\frac{1}{2}\\ \Rightarrow b=-a\\ \end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\-a\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ un vecteur non propre associé à la valeur propre triple 0 qui est : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en prenant $a = 0$

Nous allons construire un second vecteur non propre à partir de $\vec{u}$ en utilisant la technique en chaîne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ie } \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ et $2\gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{8}$, on peut alors prendre $\alpha = \beta = \frac{1}{8} \Rightarrow$ un vecteur non propre $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

D'où une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ -1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ dont l'inverse se calcule par le pivot de Gauss et donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule alors $J = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien la réduite de Jordan associée à A.

6°) $J = D + N = N$ car $D = 0 \Rightarrow J^n = N^n \Rightarrow$ on va calculer $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0 \Rightarrow N^k = 0, \forall k \geq 3$.

Donc $J^n = 0$, $\forall n \geq 3$.

or $A = P J P^{-1} \Rightarrow A^n = P J^n P^{-1} = 0$, $\forall n \geq 3$ (on retrouve $A^3 = 0$). On vérifie pour A^2 avec $J^2 = N^2$.

7°) $U_n = A^n U_0$ ie $U_1 = A U_0$, $U_2 = A^2 U_0$ et $U_3 = A^3 U_0 = 0$ et $U_n = 0$, $\forall n \geq 3$ ie $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1°) $\det(M-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$(-\lambda)\left((-\lambda)(-1-\lambda)-2\right) = (-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$

Donc le poca$(M) = P(X) = (-X)(X^2+X-2) = -X^3-X^2+2X =$
$(-X)(X+2)(X-1)$

2°) un poann(M) permet d'avoir (Cayley-Hamilton) :

$$-M^3-M^2+2M = 0 = -M(M+2I_3)(M-I_3)$$

3°) les Valeurs propres de M : on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 1$
Donc $Sp(M) \subset \{0;-2;1\}$. De plus, $tr(M) = 0+0-1 = -1$
$= 0+1-2 = -1 =$ somme des Valeurs propres $\Rightarrow$

$$Sp(M) = \{0;-2;1\}.$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = 0$ puis $x_1 - y_1 = 0$ ie $y_1 = x_1 \neq 0$

$$\Rightarrow E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\underline{\lambda_2 = -2}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2x_2 + z_2 = 0 \quad z_2 = -2x_2$
$2y_2 - z_2 = 0 \quad z_2 = 2y_2 \Rightarrow y_2 = -x_2$
$x_2 - y_2 + z_2 = x_2 + x_2 - 2x_2 = 0, \forall x_2$

$$\Rightarrow E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

$\underline{\lambda_3 = 1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x_3 + z_3 = 0 \quad z_3 = x_3$
$-y_3 - z_3 = 0 \quad y_3 = -z_3 = -x_3$
$x_3 - y_3 - 2z_3 = x_3 + x_3 - 2x_3 = 0, \forall x_3$

$$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

4°) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} M P$ donc $M = P D P^{-1}$

Il faut trouver P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $M = P D P^{-1} \Longrightarrow$

$M^n = P D^n P^{-1}$ il faut effectuer

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \quad P D^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 1 \\ 0 & -(-2)^n & -1 \\ 0 & -2(-2)^n & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 1 \\ 0 & -(-2)^n & -1 \\ 0 & -2(-2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \end{pmatrix}$$