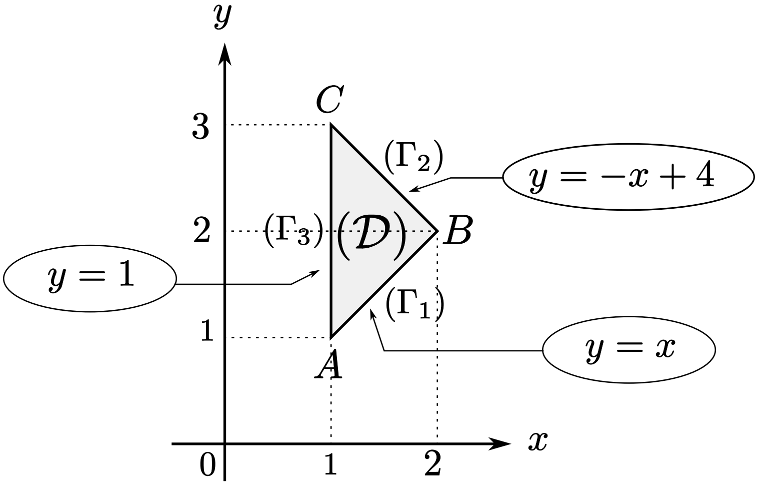
MVA006

Corrigé du devoir n°5

Exercice 1

1°)



2°) $(\mathcal{D}_f)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ (*ie* un compact de $\mathbb{R}^2$), sans trou, et convexe. Sa nature permet d'utiliser le théorème de Green-Riemann qui permet de transformer l'intégrale curviligne en une intégrale double, car comme on le verra plus loin, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$.

3°) On pose $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = (x+y)^2$.

Il faut calculer les équations de (AB), (BC) et (CA).

Pour (AB), $y = x$ car $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right. \in (AB)$.

Pour (BC), $y = ax+b$ avec $\begin{cases} 2 = 2a+b \\ 3 = a+b \end{cases} \Rightarrow a = -1$ et $b = 4$ *ie* $y = -x+4$.

Pour (CA), $x = 1$ et y entre 3 et 1.

Calculons $\displaystyle\int_{(\Gamma_1)} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$. On a $y = x$ et $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\Rightarrow \int_1^2 2(x^2+x^2)\,dx + (x+x)^2\,dx = \int_1^2 (4x^2+4x^2)\,dx = 8\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\Big(8-1\Big) = \frac{56}{3}$$

Calculons $\displaystyle\int_{(\Gamma_2)} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ où $y = -x+4$ et x entre 2 et 1.

$$\Rightarrow \int_1^2 2(x^2+(-x+4)^2)\,dx + (x+(-x+4))^2\,(-dx) = \int_2^1 \Big(2(x^2+x^2-8x+16)+(-16)\Big)\,dx$$
$$= \int_2^1 \Big(2(2x^2-8x+16)-16\Big)\,dx = \int_2^1 \Big(4x^2-16x+16\Big)\,dx = 4\left[\frac{x^3}{3} - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 4\Big(x\Big)\right]_2^1$$
$$= 4\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^1 = 4\left(\left(\frac{1}{3}-2+4\right) - \left(\frac{8}{3} - \cancel{8} + \cancel{8}\right)\right) = 4\left(\left(\frac{1}{3}+2\right) - \frac{8}{3}\right) = 4\left(\frac{7}{3} - \frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Calculons : $\displaystyle\int_{(\Gamma_3)} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ avec $x=1 \Rightarrow dx = 0$ et y entre 3 et 1.

$$\begin{aligned}\int_3^1 \underbrace{\cancel{2(1^2+y^2)(0)}}_{0} + (1+y)^2\,dy &= \int_3^1 (y+1)^2\,dy = \int_3^1 (y^2+2y+1)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} + 2\left(\frac{y^2}{2}\right) + y\right]_3^1 = \left[\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right]_3^1 \\ &= \left(\frac{1}{3}+1+1\right) - \left(9+9+3\right) = 2 + \frac{1}{3} - 21 = -19 + \frac{1}{3} = -\frac{56}{3}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}$$

4°) Les conditions d'utilisation de Green-Riemann sont satisfaites aussi bien avec $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$ (qui est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) et $Q(x,y) = (x+y)^2$ (également $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) que par le domaine $(\mathcal{D})$ qui est convexe, car $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(x-y) \neq 0$

$$\Rightarrow I = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2(2y) = 4y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y - 4y = 2x - 2y = 2(x-y)$$

avec $(\mathcal{D})$ = le triangle $ABC = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leqslant x \leqslant 2 \ \text{ et } \ x \leqslant y \leqslant -x+4\} \Rightarrow I = 2\displaystyle\int_1^2 dx \left(\int_x^{-x+4} (x-y)\,dy\right)$

On calcule d'abord $\displaystyle\int_x^{-x+4} (x-y)\,dy$

$$\begin{aligned}\int_x^{-x+4} (x-y)\,dy &= \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=-x+4} = \left(x(-x+4) - \frac{1}{2}(-x+4)^2\right) - \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \left(-x^2 + 4x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16)\right) - \frac{x^2}{2} = \left(-x^2 + 4x - \frac{x^2}{2} + 4x - 8 - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= -2x^2 + 8x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= 2\int_1^2 (-2x^2+8x-8)\,dx = 4\int_1^2 (-x^2+4x-4)\,dx = 4\left[-\frac{x^3}{3} + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 4x\right]_1^2 \\ &= 4\left(\left(-\frac{8}{3} + \cancel{8} - \cancel{8}\right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 4\right)\right) = 4\left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2\right) = 4\left(-\frac{8}{3} + \frac{7}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

On retrouve bien la même valeur pour I.

Exercice 2

1°) Il faut étudier la courbe en polaires $r(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$r \ : \ \theta \mapsto r(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ est définie et C^∞ sur le domaine $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. r est 2π−périodique, $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$ et $r(\theta+2\pi) = r(\theta)$.

Donc on peut limiter l'étude à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ et la courbe sera intégralement obtenue.

On a $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe (Ox) $\Rightarrow$ on peut limiter l'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on complètera par la symétrie d'axe (Ox).

$$\begin{aligned}r'(\theta) &= \frac{\cos\theta(-2\sin 2\theta) + \sin\theta(\cos 2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(2\cos^2\theta - 1)}{\cos^2\theta} \\ &= \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)(2\cos^2\theta - 1 - 4\cos^2\theta) = \frac{(-\sin\theta)}{(\cos^2\theta)}(2\cos^2\theta + 1)\end{aligned}$$

Donc signe$(r'(\theta))$ = −signe$(\sin\theta)$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

En $M(0)$, la tangente est orthoradiale

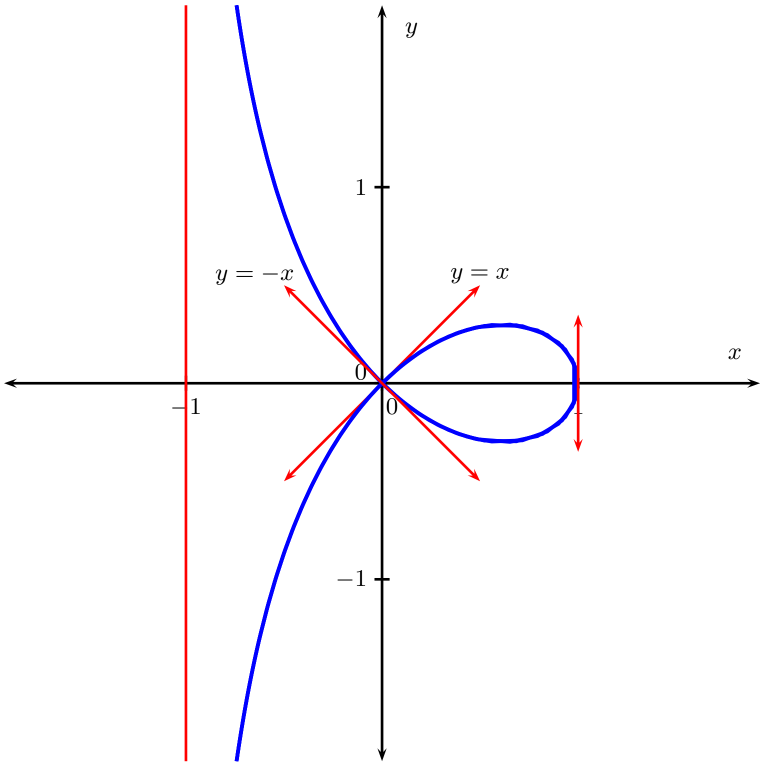
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$		$-$	
$r(\theta)$	1 $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

$\theta \to \frac{\pi}{2},\ r(\theta) \to -\infty \qquad d(\theta) = r(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -r(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -r(\theta)\cos\theta = -\cos 2\theta \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote et la courbe est à droite.

En $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, on a un passage par l'origine et on a alors la boucle recherchée, la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$ (et aussi $\theta = -\frac{\pi}{4}$).

Donc la boucle correspond à $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{4}$Donc la boucle correspond à $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{4}$



2°) L'aire voulue se calcule par l'intégrale curviligne $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint \left(r(\theta)\right)^2 d\theta$ avec considération de symétrie par rapport à l'axe (Ox) $(r(-\theta) = r(\theta))$

On a : $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos^2\theta - 1)^2}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1}{\cos^2\theta} d\theta$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta - 4\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta - \pi + 1$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \cancel{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{\cancel{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 1 - \pi = 2\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + 1 + 1 - \pi = 2 - \pi + \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$

☆☆☆☆☆☆

 kalfaian@cnam.fr