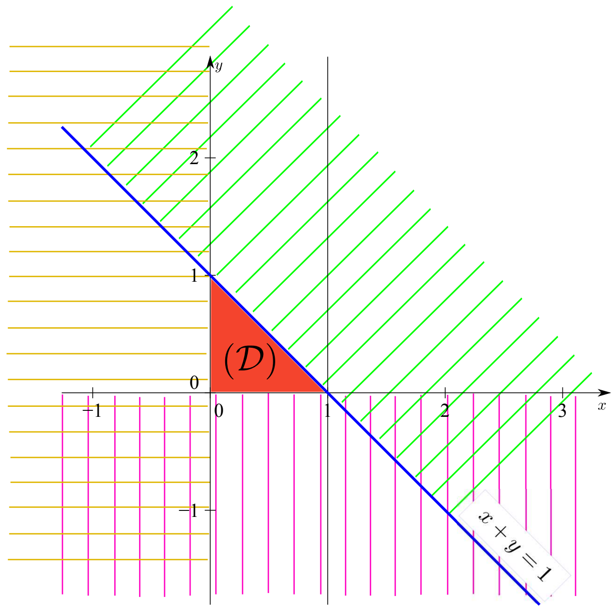
MVA006

Corrigé du devoir n°2

Exercice 1

1°)



$(\mathcal{D})$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ (*ie* un compact de $\mathbb{R}^2$).
$f(x,y)=xy$ est continue sur $(\mathcal{D})$ compact donc elle est intégrable sur $(\mathcal{D})$.

2°) $x \geqslant 0\ ,\quad y \geqslant 0\ ,\quad x+y \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant y \leqslant 1-x \quad ie \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
et de même, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1-y \quad ie \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\text{Donc}\quad I &= \int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x} xy\,dy\right) = \int_0^1 dx\left(x\int_0^{1-x} y\,dy\right) = \int_0^1 x\,dx\left(\int_0^{1-x} y\,dy\right)\\
&= \int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left(1-x\right)^2 dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2-2x+1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9-8}{12}\right) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

3°)
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy\left(\int_0^{1-y} xy\,dx\right) = \int_0^1\left(y\int_0^{1-y} x\,dx\right)dy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} dy\\
&= \int_0^1 y\frac{1}{2}\left(1-y\right)^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y^2-2y+1\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1\left(y^3-2y^2+y\right)dy\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

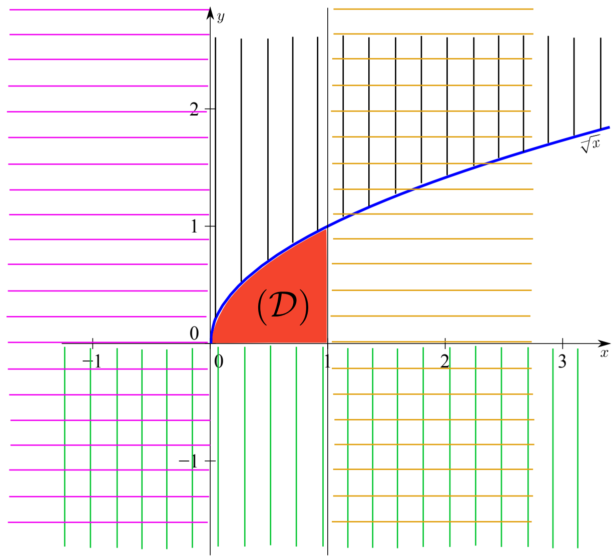
4°) C'est l'application du théorème de Fubini qui justifie l'indifférence à l'ordre d'intégration.

kalfaian@cnam.fr

Exercice 2

1°) $y^2 \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad$ on a $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

De plus $\quad y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad$ si $\quad y^2 = x \quad$, alors $\quad y = +\sqrt{x}$
$\Rightarrow \quad (\mathcal{D})$ peut s'écrire encore : $\quad (\mathcal{D}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$



2°) On commence par intégrer en y avec bornes qui dépendent de x :

$$\int_0^1 dx \left(\int_0^{\sqrt{x}} x^2\, dy \right) = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \Big[y \Big]_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x}\, dx \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{7}$$

☆☆☆☆☆☆

kalfaian@cnam.fr