# MVA006

## Corrigé du devoir n°1

### Exercice 1

$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2$

1°)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 6y = -3y(y+2) = 0 \Rightarrow y_1 = 0;\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{les 4 couples :} \quad M_1\left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. ; \quad M_2\left| \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \right. ; \quad M_3\left| \begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix} \right. ; \quad M_4\left| \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \right. .$$

2°) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6;\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y - 6;\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$rt - s^2 = 6(x+1)6(-y-1) = -36(x+1)(y+1)$

Calculons :

$(rt - s^2)(M_1) = -36 < 0$ $\Rightarrow$ point col en $M_1$.

$(rt - s^2)(M_2) = -36(1)(-1) = 36 > 0$ et $r(M_2) = 6 > 0$ $\Rightarrow$ $M_2$ minimum local de $f$.

$(rt - s^2)(M_3) = -36(-1)(1) = 36 > 0$ et $r(M_3) = -6 < 0$ $\Rightarrow$ $M_3$ maximum local de $f$.

$(rt - s^2)(M_4) = -36(-1)(-1) < 0$ $\Rightarrow$ point col en $M_4$.

### Exercice 2

1°) $\mathcal{D}_f = (\mathbb{R}_*^+)^2$ $\quad f$ est le produit de fonctions de classe $C^\infty$ sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$ donc elle est $C^\infty$ sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.

De plus, quand $(x,y) \to (0^+, 0^+)$, on a : $x \ln y \to 0$ et $y \ln x \to 0$, donc $f(x,y) \to 0$ $\Rightarrow$ on peut prolonger par continuité en $(0,0)$, en posant $f(0,0) = 0$.

2°) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y - \dfrac{y}{x}\,;$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y} - \ln x\,;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y}{x^2}\,;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{x}{y^2}\,;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-y}{xy}\ .$

3°) On résout le système :

$$\begin{cases} \ln y - \dfrac{y}{x} = 0 \\ \\ \dfrac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \qquad ie \qquad \begin{cases} x \ln y = y \\ \\ y \ln x = x \end{cases}$$

Déjà, on peut affirmer que $x$ et $y$ sont $\neq 1$ car si $x = 1$, on a $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{y} = 0$ absurde et si $y = 1$, on a $\dfrac{1}{x} = 0$ absurde.

On voit aussi que le point $M \left| \begin{array}{l} e \\ e \end{array} \right.$ est solution car $\ln e = 1$

On a : $\ln y = \dfrac{y}{x}$ et $\ln x = \dfrac{x}{y}$ donc $\ln y \ln x = 1$, ce qui donne $x = y = e$.

On calcule $rt - s^2 = \left(\dfrac{y}{x^2}\right)\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) - \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)^2 = -\dfrac{1}{xy} - \left(\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{xy}\right) = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy}$
en $(e,e)$ : $(rt - s^2)(e,e) = \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2} < 0$

Donc il y a un point col en $M \left| \begin{array}{l} e \\ e \end{array} \right.$ .

☆☆☆☆☆☆

 kalfaian@cnam.fr