CNAM – *Paris* Juillet 2011

MVA004 - Automates, codes, graphes et matrices - HTO et TO

Première Session - Samedi 2 juillet 2011

Tous documents autorisés. Tous appareils électroniques interdits.

Exercice 1 (4 points)

On considère les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et les trois propositions :

(P1) Si A est inversible et $AB = AC$ alors on a toujours $B = C$.

(P2) On a toujours $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(P3) Si $A^2 = 0$ alors on a toujours $A = 0$.

Indiquer si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier à chaque fois votre réponse soit par un contre-exemple soit par une démonstration.
Pour construire les contre-exemples vous pourrez utiliser les matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

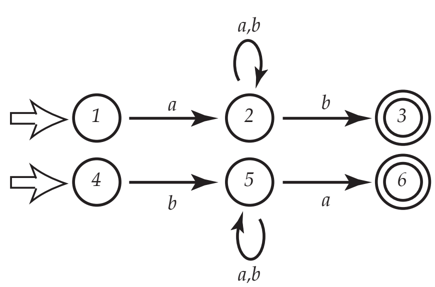
Exercice 2 (4 points)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{m, v, a\}$

1) Donner la liste de tous les mots de Σ^* de longueur inférieure ou égale à 2.
2) Soit L le langage formé des mots qui ne contiennent aucune lettre a, déterminer $m^{-1}L$, $v^{-1}L$ et $a^{-1}L$.
3) Déduire de la question précédente l'automate minimal qui reconnaît L.

Exercice 3 (9 points)

On considère sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ l'automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ de diagramme :



1) Ecrire le système du départ pour cet automate. En déduire le langage L reconnu par $\mathcal{A}$.
2) Construire $\mathcal{B}$, un AFN-ϵ qui reconnaît L^+.
3) Déterminiser $\mathcal{B}$ et en déduire (indiquer la méthode de minimisation choisie) l'automate minimal qui reconnaît L^+.

T.S.V.P.

Exercice 4 (6 points)

On considère qu'on possède un canal binaire symétrique sans mémoire de probabilité de mauvaise transmission d'un bit p et un code linéaire et systématique de matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déduire les valeurs de n, k et r, puis la matrice génératrice du code.

2) Déterminer la distance minimale du code, en déduire le nombre d'erreurs détectées de façon certaine et le nombre d'erreurs corrigées façon certaine.

3) Quel est le syndrome du message $m = 11111111$? Existe-t-il plusieurs corrections équiprobables ?

✯✯✯✯✯✯