MVA107	Devoir n°...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ...
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant d' ED : ...

MVA107 - Devoir n°1

remettre pour le *vendredi 2010*

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considre les vecteurs suivants :

$u_1 = (1, 0, 3, 4); u_2 = (2, 3, 4, 1); u_3 = (1, 3, 1, -3); v_1 = (4, 2, 2, 3); v_2 = (1, 2, 3, 0)$.

Soit E l'espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$, F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2\}$,

1. Déterminer une base de E.
2. Déterminer une base de F.
3. Démontrer, en considérant leurs dimensions, que E et F sont des sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$ (c'est à dire que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$)

Exercice 2(d' après examen 2009-10)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

1. Dans $\mathcal{E}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, soit f est défini par :
   $f(P(x)) = -P(x) + \frac{1}{2}(P(x + 1) - P(x - 1))$
   Montrer rapidement que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ (application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$)
2. Montrer que A est la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B}$. Pour cela expliciter l' image par f de chacun des vecteurs de $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
3. Un vecteur de $\mathcal{E}$ ou polynôme $P(x)$ est noté $v = a + bx + cx^2 + dx^3$,soient les vecteurs $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = \frac{1}{2}x^2$ écrire dans $\mathcal{B}$ leur colonne V_1,V_2, V_3 .
4. On considère l'équation :
   $$(A + I)X = V_3$$
   dans laquelle X est l'inconnue.
   Déterminer l' ensemble des X solutions puis une colonne V_4 solution particulière telle que deux de ses quatre coefficients soient nuls.
5. Vérifier que les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) associés aux colonnes V_1,V_2, V_3 et V_4 forment une base . Expliciter R la matrice de passage de la base naturelle $\mathcal{B}$ à la nouvelle base (v_1, v_2, v_3, v_4).
6. (facultatif) Expliciter la matrice représentative de f dans cette nouvelle base.