MVA107 - Corrigé du devoir n°1

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :
$u_1 = (1, 0, 3, 4); u_2 = (2, 3, 4, 1); u_3 = (1, 3, 1, -3); v_1 = (4, 2, 2, 3); v_2 = (1, 2, 3, 0)$.
E l'espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$, F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2\}$,

1. E est l'espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$,
   On utilise la méthode du pivot , $u_2 - u_1 = (0, 3, -2, -7)$ et $u_3 - u_1 = (0, 3, -2, -7)$
   donc $u_2 - 2u_1 - (u_3 - u_1) = 0$ est la relation de dépendance linéaire des 3 vecteurs .
   L ' écriture $u_3 = u_2 - u_1$ montre que les 2 vecteurs u_1 et u_2 sont générateurs de E et comme ils sont bien sûr linéairement indépendants donc ils forment une base de E.

2. F est l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2\}$,comme à la question précédente , on ne peut pas trouver un réel k tel que v_2=kv_1 ou v_1=kv_2, les deux vecteurs sont linéairement indépendants et engendrent un sous espace vectoriel de dimension 2,ils sont générateurs de F, donc ils forment une base de F.

3. Le théorème des dimensions dit que $\dim E + F = \dim E + \dim F$ - $\dim E \bigcap F$,
   Pour montrer que les deux espaces E et F sont supplémentaires il faut montrer que leur intersection est le vecteur nul et que la somme $E + F$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
   En pratique, il suffit de vérifier que les quatres vecteurs $\{u_1, u_2, v_1\}$ et v_2 qui engendrent $E+F$ sont linéairement indépendants.
   Pour cela on résout le système linéaire (S) :
   $\alpha(1, 0, 3, 4) + \beta(2, 3, 4, 1) + \gamma(4, 2, 2, 3) + \delta(1, 2, 3, 0) = (0, 0, 0, 0)$ soit :
   $$\begin{array}{ccccc} \alpha+ & 2\beta+ & 4\gamma+ & \delta & = 0 \\ & 3\beta+ & 2\gamma+ & 2\delta & = 0 \\ 3\alpha+ & 4\beta+ & 2\gamma+ & 3\delta & = 0 \\ 4\alpha+ & 1\beta+ & 3\gamma & & = 0 \end{array}$$
   <u>la methode de Gauss donne</u> :
   $$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & -4 \end{array} \text{ et ensuite } \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -26/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -25/3 & 2/3 \end{array} \text{ et enfin}$$
   $$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -26/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{array} \text{ soit en re écrivant les équations } \begin{array}{ccccc} \alpha+ & 2\beta+ & 4\gamma+ & \delta & = 0 \\ 0+ & 3\beta+ & 2\gamma+ & 2\delta & = 0 \\ 0+ & 0+ & -26/3\gamma+ & 4/3\delta & = 0 \\ 0+ & 0+ & 0 & -8/3\delta & = 0 \end{array}$$
   on en déduit en remontant que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont nuls.
   ainsi les quatres vecteurs sont libres , étant générateurs par définition de $E + F$ ils forment une base de $E + F$, $\dim(E + F)$ =4 ,
   soit $\mathbb{R}^4 = E + F$, par le théorème des dimensions $\dim(E \cap F)$=0, donc $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$

.

Exercice 2(d' après examen 2009-10)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

1. Dans $\mathcal{E}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, f est définie par :
   $f(P(x)) = -P(x) + \frac{1}{2}(P(x+1) - P(x-1))$
   Pour montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ on vérifie la linéarité de f :
   • $f(P_1 + P_2)(x) = -(P_1 + P_2)(x) + \frac{1}{2}((P_1 + P_2)(x+1) - (P_1 + P_2)(x-1)) = -P_1(x) + \frac{1}{2}(P_1(x+1) - P_1(x-1)) + (-P_2(x) + \frac{1}{2}(P_2(x+1) - P_2(x-1))) = f(P_1(x)) + f(P_2(x))$
   • $f(sP(x)) = -sP(x) + \frac{1}{2}(sP(x+1) - sP(x-1)) = s(-P(x) + \frac{1}{2}(P(x+1) - P(x-1))) = sf(P(x)$
2. Pour montrer que A est la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ on calcule l' image par f de chacun des vecteurs de $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
   $f(1) = -1 + 1/2(1-1) = -1 = -1 + 0 + 0 + 0$
   $f(x) = -(x) + \frac{1}{2}((x+1) - (x-1)) = -x + 1 = 1 + (-1)x + 0 + 0$
   $f(x^2) = -x^2 + \frac{1}{2}((x+1)^2 - (x-1)^2) = -x^2 + 2x = 0 + 2x + (-1)x^2 + 0$
   $f(x^3) = -P(x) + \frac{1}{2}((x+1)^3 - (x-1)^3) = -x^3 + 3x^2 + 1 = 1 + 0x^2 + 3x^2 + (-1)x^3$
   Attention comme on écrit en colonne pour la représentation matricielle les coordonnées des vecteurs image, on trouve bien les colonnes de A
3. Un vecteur de $\mathcal{E}$ ou polynôme $P(x)$ est noté $v = a + bx + cx^2 + dx^3$,soient les vecteurs $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = \frac{1}{2}x^2$ on écrit dans $\mathcal{B}$ leur colonne $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   .
4. On considère l'équation :
   $$(A + I)X = V_3$$
   dans laquelle X est l'inconnue :
   $\begin{pmatrix} -0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} b + d & = 0 \\ 2c & = 0 \\ 3d & = 1/2 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ d'où $X = \begin{pmatrix} a \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$
   Il y a une infinité de solutions et une colonne V_4 solution particulière telle que deux de ses quatre coefficients soient nuls est obtenue pour $a = 0$
5. Pour vérifier que les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) associés aux colonnes V_1,V_2, V_3 et V_4 forment une base on explicite R la matrice de passage de la base naturelle $\mathcal{B}$ à la nouvelle base (v_1, v_2, v_3, v_4)
   $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$ ... si on connaît les déterminants on voit que det$R = 1/12$
   donc R est une matrice de changement de base ... sinon ont vérifie que les 4 vecteurs sont linéairement indépendants.
6. (facultatif) La matrice représentative de f dans la nouvelle base est obtenue en calculant $R^{-1}AR$

Le calcul de R^{-1} est fait par la méthode du système linéaire associé :
le principe est que si pour tout Y on peut résoudre $RX = Y$ alors $X = R^{-1}Y$,

soit $\left(\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 \\ x_2 - 1/6x_4 & = & y_2 \\ 1/2x_3 & = & y_3 \\ 1/6x_4 & = & y_4 \end{array}\right.$ alors $\left(\begin{array}{lcr} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 + y_4 \\ x_3 & = & 2y_3 \\ x_4 & = & 6y_4 \end{array}\right.$ d' où $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Il ne reste plus qu' à effectuer le produit :

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$