MVA107	Devoir n°...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ...
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant d' ED : ...

MVA107 - Corrigé du devoir n°4

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des points (x, y) délimité par les droites $y = 3$, $y = x$ et $y = -x$.

1. Pour y fixé, x varie de $-y$ à y, $I = \iint_{\mathcal{T}} y\,dxdy = \int_{y=0}^{y=3} y(\int_{x=-y}^{x=y} 1\ dx)\,dy = \int_{y=0}^{y=3} y2y\,dy = ((2/3)y^3)_0^3 = 18$
2. J est l' aire du triangle donc $J = \iint_{\mathcal{T}} dxdy = 9$ et $K = \iint_{\mathcal{T}} x\,dxdy = 0$ car la fonction x est impaire et elle est intégrée sur un domaine symétrique par rapport à oy.

Exercice 2 (d' après avril 2009)

L'espace de dimension 3 est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $\vec{V}$ le champ de vecteur qui associe au point M de coordonnées (x, y, z) le vecteur $\vec{V}(M)$:
$V(\vec{M}) = -y\vec{i} + (x + 1)\vec{j} + z\vec{k}$.
On note A le point de coordonnées $(1, 3, 0)$, H le point de coordonnées $(1, 0, 0)$ et C le point de coordonnées $(0, 0, 4)$.

1. Le rotationnel : Etant donné un champ de vecteur C^1
   $\overrightarrow{V}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$,
   on lui associe un nouveau champ de vecteur appelé rotationnel de $\overrightarrow{V}$ défini par :
   $\overrightarrow{Rot(V)} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$
   Ici $Rot(V) = (\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x+1}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial -y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial x+1}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y})\vec{k} = 2\vec{k}$
   Si $\overrightarrow{V}(M)$ est un champ de vecteur C^1 qui vérifie $\overrightarrow{Rot(V)} = \vec{0}$ on dit que $\vec{V}$ est un champ de gradient ou que $\vec{V}$ "dérive d' un potentiel scalaire", le potentiel scalaire étant $-f$. Ici la réponse est donc non.
   Etant donné un champ de vecteur C^1 $\overrightarrow{V}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$,
   on lui associe une fonction appelée divergence de $\overrightarrow{V}$, définie par :
   $div(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, ici $div(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial -y}{\partial x} + \frac{\partial x+1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1$
   Le champ de vecteur $\vec{V}$ne dérive pas d' un potentiel vecteur car $div\vec{V} = 1$
2. Dans cette question $z = 0$, alors $\vec{V}(M) = -y\vec{i} + (x + 1)\vec{j}$ et on va calculer des intégrales curviligne $\int -ydx + (x + 1)dy$.
   I_1 est la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OA parcouru de O vers A.Le point M est situé sur la droite d' équation $y = 3x$. Le paramètre choisi sera x variant de 0 à 1 $\quad x = x$, $dx = dx$, $\quad y = 3x$, $dy = 3dx$

$I_1 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (-3x)\ dx) + (x+1)3\, dx = 3$

I_2 est la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OH parcouru de O vers H.On choisira x comme paramètre $y = 0$ et $dy = 0$ $I_2 = \displaystyle\int -ydx + (x+1)dy = 0$.

I_3 est la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment HA parcouru de H vers A.Le paramètre sera y , $x = 1$, $dx = 0$,$y = y$ et $dy = dy$

$I_3 = \displaystyle\int_{y=0}^{y=3} (-y)\ 0 + (1+1)dy = 6$

3. .La formule de Green appliquée au champ de vecteur $\vec{V}$ et au triangle OHA s' écrit pour C la courbe fermée $OHAO$ qui est C^1 par morceaux orientée dans le sens trigonométrique et $\overrightarrow{V}(M)$ un champ de vecteur C^1 sur $\mathcal{D}$ domaine de type pavé dont le bord est C :
   $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dx\, dy$
   $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 - (-1) = 2$
   $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = I_2 + I_3 - I_1 = 0 + 6 - 3 = 3$ et la valeur de l'intégrale double sur le triangle est 2 Aire du triangle $OHAO = 2(3/2) = 3$

4. (facultatif) On considère la pyramide de base OAH et de hauteur OC . Le flux total du champ de vecteur $\vec{V}(M)$ sortant des quatre surfaces triangulaires bord de la pyramide est donné en utilisant la formule d'Ostrogradski :
   On a une région bornée ou solide Ω de R^3 dont le bord est une surface fermée C^1 par morceaux notée $\mathcal{S}$,
   on a un champ de vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ qui est C^1 , alors le flux sortant
   $\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{n}(M)dS$ est égal à $\iiint_\Omega div\overrightarrow{V}(M)dx\, dy\, dz$
   D' après la question 1 $div\vec{V}(M) = 1$ donc le flux sortant est le volume de la pyramide soit (1/3) Base x Hauteur = (1/3) (3/2) 4 = 2 .

5. (facultatif) Calculer le flux F du champ de vecteur $\vec{V}$ à travers le triangle AHC situé dans le plan d' équation $4x + z = 4$ et de normale orientée vers l' extérieur de la pyramide .
   Rappel : le produit vectoriel $\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v)\Lambda\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v) = \vec{N}(u,v)$ est un vecteur normal (au plan tangent) à la surface $\mathcal{S}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

   Ici le paramétrage du triangle AHC est (x,y) avec $x = x$, $y = y$, $z = 4 - 4x$,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{N}(x,y) \quad \text{et} \quad \vec{V}(x,y,4-4z) = \begin{bmatrix} -y \\ x+1 \\ 4-4x \end{bmatrix}$$

   Flux $= \iint_{\mathcal{T}} \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{n}(M)dS$ où $\overrightarrow{n}(M)$ est unitaire et donne l' orientation de la surface .
   F $= \pm \iint_{(x,y)} \overrightarrow{V}(M(x,y)).\overrightarrow{N}(x,y)dxdy = + \iint_{(x,y)} 4 - 4x - 4y\ dxdy$ (+ car $\vec{N}.\vec{k} > 0$)
   Le domaine d' intégration dans R^2 est le triangle OHA (projection de OAC)
   Pour x fixé, y varie de 0 à $3x$, $F = \displaystyle\iint_{(x,y)} 4-4x-4y\, dxdy = \int_{x=0}^{x=1} (\int_{y=0}^{y=3x} 4-4x-4y\ dy)\, dx$
   $= \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (4y - 4xy - 2y^2)_0^{3x}\, dx = \int_{x=0}^{x=1} 12x - 30x^2\, dx = -4$