CNAM – *Paris* février 2011

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 (8 points)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{E}$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, qui associe au polynôme P le polynôme $f(P)$ défini par : $f(P)(x) = 2P'(2x) - P(-x)$.
   Vérifier que A est la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, en calculant l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
3. Résoudre l' équation $(A + I)X = V_1$, on appellera V_2 la solution telle que $x_1 = 0$
   (remarque : x_2 et x_3 sont des fractions).
4. Déduire de 1. et 3. une matrice de changement de base R telle que la matrice représentative de f dans la nouvelle base soit la matrice de Jordan :
   $$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. On suppose que $Y(t)$ est fonction de la variable t .Résoudre $Y'(t) = JY(t)$.
6. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et préciser ce que représentent les constantes introduites dans la résolution.

Exercice 2 (6 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ une matrice et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base d' un espace vectoriel E.

1. Soit g un endomorphisme de E représenté dans $\mathcal{B}$ par M. Déterminer les valeurs propres de M. Déterminer les sous espaces propres de M puis une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise g.
2. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ admettant dans la base $\mathcal{B}$ l'expression : $q(\vec{x}) = {}^t XMX$, où $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$, écrire $q(\vec{x})$
   La forme bilinéaire symétrique φ associée à q est-elle un produit scalaire ?
3. Déterminer une matrice orthogonale R (donc telle que ${}^t R = R^{-1}$) dont les colonnes sont des vecteurs propres qui diagonalisent la forme bilinéaire φ. Quelle est la matrice représentative de φ dans cette nouvelle base $\mathcal{B}''$?
   En déduire une expression de q comme somme ou différence de deux carrés (en fonction de x_1 et x_2).
4. Déduire de 3. deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 tel que $E_1 \bigoplus E_2 = E$ avec $q \leq 0$ pour $\vec{x} \in E_1$ et $q \geq 0$ pour $\vec{x} \in E_2$

voir l' exercice 3 au verso

Exercice 3 (9 points)

L'espace de dimension 3 est muni du repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteur qui associe au point M de coordonnées (x, y, z) le vecteur :

$$\overrightarrow{V(M)} = (z - 2xy)\vec{i} + (2y - x^2 + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$$

On note A le point de coordonnées $(3, 0, 0)$, B le point de coordonnées $(0, 3, 0)$ et C le point de coordonnées $(0, 3, h)$.

1. Calculer $Rot\overrightarrow{V}$ et $div\overrightarrow{V}$.
   Le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? d'un potentiel vecteur ?
2. Déterminer $F(x, y, z)$ telle que $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{gradF(M)}$ et $F(0, 0, 0) = 0$.
3. En utilisant une paramétrisation, calculer I_1 la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment AB parcouru de A vers B .

   En utilisant une paramétrisation, calculer I_2 la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long du segment BC parcouru de B vers C.

   Calculer $I_1 + I_2$ puis retrouver ce résultat en utilisant la fonction F.
4. Dans le plan d'équation $z = 0$, on considère la triangle Δ délimité par O, A, et B.
   calculer $T = \iint_{\Delta} (y - 1)\, dxdy$.
5. On considère $\mathcal{S}$, le solide de section triangulaire, de base Δ délimité par O, A, B, et de hauteur h.
   Quel flux représente $D = \iiint_{\mathcal{S}} div\overrightarrow{V}\, dxdydz$?
   Calculer D (intégrer en z, puis utiliser T).