CNAM – *Paris* avril 2011

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie
deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 (8 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base naturelle, un vecteur v est représenté par X et un endomorphisme f est représenté par A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l' inverse de P (méthode au choix) et calculer $P^{-1}P$.
2. Calculer $P^{-1}AP = J$, en déduire les valeurs propres de f .
3. Soient (V_1, V_2, V_3) les colonnes de P, matrice de changement de base, écrire les 3 équations qui déterminent les colonnes de la matrice J :
   $f(v_1) = ... , \quad f(v_2) = ... , \quad f(v_3) = ...$
4. Calculer J^n, puis A^n pour tout entier n.
5. Déterminer u_n , v_n et w_n pour tout n en fonction de u_0 , v_0 et w_0
   $$\begin{cases} u_n = -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ w_n = 2v_{n-1} \end{cases}$$

Exercice 2 (8 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice d' un endomorphisme g de E dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$

1. Déterminer les valeurs propres de A.La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous espaces propres de A puis une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise g.
3. Dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne X représente un vecteur $\vec{x} = x_1e_1 + x_2e_2$ et $q(\vec{x}) = {}^t XAX$ est une forme quadratique, effectuer le produit matriciel .
   Quelle est la matrice S de la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à q exprimée dans la base $\mathcal{B}$?
4. Déterminer les valeurs propres de S , ϕ est-elle un produit scalaire ?
5. Par la méthode de Gauss ou de Schmidt écrire q comme somme de carrés (en fonction de x_1 et x_2) et expliciter la base $\mathcal{B}''$ qui diagonalise q (expliciter la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$).

Traiter l' exercice 3 ou l' exercice 4 du verso

Exercice 3 (10 points)

1. Dans un repère orthonormé $(O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$, on considère le champ de vecteur $\vec{V}(M) = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ où M est le point de coordonnées (x, y, z)
   Calculer $div\vec{V}(M)$ et $\overrightarrow{Rot(V)}(M)$. Si $\vec{V}(M)$ est un champ de gradient ou un champ de rotationnel en déduire le potentiel (scalaire ou vectoriel) correspondant .
2. Soit la surface (S), parabolode de révolution,d' équation $z = x^2 + y^2$ où $0 \leq z \leq 4$, déterminer $\overrightarrow{N_1(x,y)}$ le vecteur normal à la surface (S) pour la paramétrisation (x, y).
3. Calculer le produit scalaire $\vec{V}(M).\overrightarrow{N_1(x,y)}$ pour M sur la surface (S), donc pour $z = x^2 + y^2$.
   Puis calculer le flux de $\vec{V}(M)$ à travers (S) , où $\vec{n_1}$ est de même sens que $\overrightarrow{N_1(x,y)}$.
   $F_1 = \iint_S \vec{V}(M).\vec{n_1}(M)\, dS$
   pour l' intégrale en (x,y), passer en coordonnées polaires (r,θ), $\int_0^{2\pi} cos\theta(sin\theta)^2 d\theta = 0$.
4. Soit D le disque situé dans le plan $z = 4$, d' équation $z = 4$ délimité par $x^2 + y^2 \leq 4$.
   Expliquer pourquoi $\overrightarrow{N_2(x,y)} = \vec{k}$ et calculer le produit scalaire $\vec{V}(x, y, 4).\overrightarrow{N_2(x,y)}$ pour M sur le disque D .
   Calculer le flux du champ de vecteur $\vec{V}(M)$ à travers la surface D orientée par $\vec{k}$,
   $F_2 = \iint_D \vec{V}(M).\vec{n_2}(M)\, dS$
5. Soit le solide parabolode plein $\Omega = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4\}$ et
   $J = \iiint_\Omega div(\vec{V}(M))dxdydz$ (on calcule J à la question suivante).
   En déduire la relation entre J , F_1 et F_2 .
6. Vérifier que $\iiint_\Omega dxdydz = 8\pi$, Expliquer pourquoi $\iiint_\Omega x\, dxdydz = 0$, en déduire la valeur numérique de J .

ou Exercice 4 (6 points)

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;(\vec{i},\vec{j}))$.
   Soient les points $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ et $C = (0, 1)$ et représenter le triangle ABC.
   Calculer $I = \iint_T (x + y)\, dxdy$, (on vérifiera que $I = \int_0^1 (x + \frac{1}{2}x^2)dx$).
2. Calculer $J_1 = \int_{AB} (2xy - x^2)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, la circulation d'un champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment AB,
   Calculer $J_2 = \int_{BC} (2xy - x^2)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, la circulation le long du segment BC,
   Calculer $J_3 = \int_{CA} (2xy - x^2)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$.
3. Ecrire la formule de Green et en déduire la relation entre I , J_1 , J_2 et J_3.

Dans un repère orthonormé $(O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$, on considère le champ de vecteur C^1
$\vec{V}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ où M est le point de coordonnées (x, y, z)
et $f(M) = f(x, y, z)$ une fonction C^1 .
En coordonnées cartésiennes démontrer la formule :
$div(f(M)\vec{V}(M)) = f(M)div\vec{V}(M) + \overrightarrow{grad}f(M).\vec{V}(M)$.