CNAM – *Paris* avril 2010

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie
deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1

La lettre m désigne un nombre réel, $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$.
Et f_m est l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui associe au polynôme P le polynôme $f_m(P)$ défini par :
$f_m(P)(x) = mP'(mx) - P(-x)$

1. Soit la matrice A_m :
$$A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 2m^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_m.
La matrice A_m est-elle diagonalisable ? On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$.
2. Vérifier que A_m est la matrice représentative de f_m dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, d'abord en calculant l'image par f_m des vecteurs de la base $\mathcal{B}$,
puis pour contrôle en écrivant l'image par f_m du polynôme $c + bx + ax^2$.
3. Dans le cas $m = 1$, déterminer une matrice de changement de base R telle que la matrice représentative de f_1 dans la nouvelle base soit la matrice de Jordan :
$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Ecrire les 3 polynômes formant la base de Jordan.
4. Calculer J^n pour tout entier n.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ la matrice d' un endomorphisme g de E dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$

1. Déterminer les valeurs propres de A.La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous espaces propres de A puis une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise g.
3. Calculer A^n pour tout entier n.
Déterminer u_n et v_n , lorsque $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$
$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 7v_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} - 6v_{n-1} \end{cases}$$
4. Dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne X représente un vecteur $\vec{x}$ et
$q(\vec{x}) = {}^t XAX$ est l' expression d' une forme quadratique .
Quelle est la matrice S de la forme bilinéaire symétrique associée ?
Cette matrice S est-elle représentative d' un produit scalaire de E ?

Voir Exercice 3 au verso

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on considère les points $O = (0,0)$, $A = (0,3)$ et $B = (1,3)$.

1. Représenter $\mathcal{T}$, le triangle OAB .
2. Calculer $I = \oint_{C} x\,y\ dx - x^2\,dy$, la circulation d'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long de C, le bord orienté de $\mathcal{T}$ parcouru dans le sens $OABO$, en précisant la paramétrisaton choisie sur chacun des trois segments cotés du triangle .
3. Calculer $J = \iint_{\mathcal{T}} x\,dxdy$.
4. Justifier par un théorème du cours la relation obtenue entre I et J.