MVA101 - Devoir n°3

à rendre au plus tard le mardi 15 décembre 2009

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir

MVA101	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ...
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1

On pose :

$$f(x) = (x-1)\log(1+x)$$

1. Quel est le développement en série entière, au voisinage de 0 de $f(x)$?
2. En déduire le développement en série entière, au voisinage de 0 de :
$$g(x) = (x-1)\log(1+x) - (1+x)\log(1-x)$$
3. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue.
4. La série converge-t-elle lorsque $x = 1$?
5. La série converge-t-elle lorsque $x = i$?
(*on pensera à appliquer le théorème sur les séries alternées*).

Exercice 2

Soit f la fonction périodique de période $T = 2$ telle que $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ pour $x \in [0, 2[$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Calculer son coefficient de Fourier a_0 puis ses coefficients de Fourier b_n.
3. En admettant que $a_n = 0$ quand $n > 0$, écrire la série de Fourier de f.
4. Tracer le graphe de $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-2, 2]$. Quelle est la parité de cette fonction ? Quelle est la série de Fourier de g ?
5. Écrire l'égalité donnée par la formule de Bessel-Parseval appliquée à f.
En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

On considère la série suivante, dans laquelle α désigne un nombre réel donné et t une variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{int}$$

1. Pour quelles valeurs de α cette série converge-t-elle quel que soit t ?
On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que α est une de ces valeurs.

2. Calculer $s(t)$, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sin nt$

   On rappelle les formules d'Euler :

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \qquad \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

3. La fonction $s(t)$ est-elle continue ? Pouvait-on le prévoir sans la calculer?

4. Ecrire les coefficients de Fourier réels, a_n et b_n de $s(t)$ sous forme d'intégrales.

5. Sans nouveau calcul dire à quoi sont égales ces intégrales et quelle est la série de Fourier de $s(t)$.

6. Vérifier ce que donne le théorème de Dirichlet lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{\pi}{4}$.

☆☆☆☆☆☆