MVA101 - Devoir n°4

à rendre au plus tard le *mardi 12 janvier 2010*

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir que vous rendez.

MVA101	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*)
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \end{cases} \quad \text{et } f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1°) Représenter graphiquement f.

2°) Exprimer $f(x)$ à partir des fonctions *(H(x) désigne l'échelon-unité)* :

$h_1(x) = [H(x) - H(x-1)]x$

$h_2(x) = H(x-1) - H(x-2)$

$h_3(x) = [H(x-2) - H(x-3)](3-x)$

3°) En déduire la transformée de Laplace de la fonction f.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^x,$$

et on cherche la solution de (E) vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

1°) Pour $x \geq 0$, on note $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(x)$.
Écrire l'équation (L) que doit vérifier $Y(p)$.

2°) Résoudre l'équation (L). En déduire la solution $y(x)$ de l'équation (E) pour $x \geq 0$.

3°) Que peut-on dire pour $x \leq 0$?

Exercice 3 Soit le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \\ z'(t) = -2x(t) + z(t) \end{cases}$$

dans lequel $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ vérifient les conditions initiales :

$$x(0) = 2 \quad y(0) = 2 \quad z(o) = -1$$

On note $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

1°) Quelles équations vérifient $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$?

2°) Résoudre ces équations.

3°) En déduire les solutions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du système différentiel.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆