MVA101

Analyse et Calcul Matriciel

Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (7 points)

Soit la fonction f impaire, périodique de période 4, définie sur $[0;2]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]1;2] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f sur $[-4;+4]$.

2. Vérifier que f est développable en série de Fourier.
   On note $S_f(t)$ sa série de Fourier réelle.
   La série $S_f(t)$ est-elle convergente ? Quelle est sa somme ?

3. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

4. En utilisant $\cos\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\cos\left(p\pi\right) = (-1)^p$ lorsque p est un entier, vérifier que :

$$S_f\big(t\big) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{4(-1)^{p+1}p}{(4p^2-1)}\sin\left(p\pi t\right)$$

5. Ecrire la relation donnée par le théorème de Dirichlet en $t = \frac{1}{2}$, en déduire que, pour q entier naturel :

$$\sum_{q\geqslant 0} \frac{4(-1)^q(2q+1)}{(4(2q+1)^2-1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 2 (8 points)

Soit $H(x)$ la fonction échelon unité, et soit :

$$f(x) = (1-x)H(x) + (x-2)H(x-2)$$

1. Faire une représentation graphique de f.

2. Calculer la transformée de Laplace de $f(x)$.

3. On recherche $y(x)$, la solution définie sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = f(x) \qquad (E)$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
On note $Y(p)$ la tranformée de Laplace de $y(x)$.

 (a) Ecrire la transformée de Laplace de l'équation (E).
 (b) Déterminer $Y(p)$.
 (c) Sachant que : $\dfrac{1}{p^2(p-1)^2} = \dfrac{1}{(p-1)^2} - \dfrac{2}{p-1} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{2}{p}$, déterminer la solution $y(x)$ recherchée.

Exercice 3 (8 points)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire que A admet une valeur propre simple λ_1 et une valeur propre double λ_2.
3. Soient les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $A.v_1$ et $A.v_2$.
4. Déterminer v_3 un vecteur propre associé à la valeur propre double λ_2 et indépendant de v_2.
En déduire une matrice P inversible telle que $AP = PD$ où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

5. Calculer l'inverse de P.
6. Utiliser les questions précédentes pour déterminer A^n où n est un entier quelconque.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆