# MVA101

## Analyse et Calcul Matriciel

Première session d'examen

---

*Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.*

---

### Exercice 1 (6 points)

Soit la fonction $f$ impaire, périodique de période 2, définie sur $[0;1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0; \frac{1}{2}[ \\ t - \frac{1}{2} & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $f$ sur $[-2; +2]$.
2. Vérifier que $f$ est développable en série de Fourier.
   On note $S_f(t)$ sa série de Fourier réelle.
   La série $S_f(t)$ est-elle convergente ? Quelle est sa somme ?
3. Calculer les coefficients de Fourier réels de $f$ et écrire $S_f(t)$.
4. En utilisant $\sin\big((2p+1)\frac{\pi}{2}\big) = (-1)^p$, vérifier que :

$$S_f\big(\frac{1}{2}\big) = \sum_{p \geqslant 0} \Big( \frac{(-1)^p}{(2p+1)\pi} - \frac{2}{\pi^2(2p+1)^2} \Big)$$

5. Montrer que les deux séries numériques : $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$ et $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ sont convergentes.
6. Sachant que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, en déduire la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$.

---

### Exercice 2 (6 points)

Soit l'équation différentielle linéaire :

$$x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \tag{1}$$

dont on cherche la solution développable en série entière au voisinage de 0, de la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. Déterminer $a_0$ et $a_1$.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par les coefficients $a_n$, pour $n > 1$.
3. En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.
4. Déterminer $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ? Cette série est-elle convergente pour $|x| = R$ ?
5. Donner une expression de la fonction $y(x)$ solution de (1) dans le disque de convergence qui utilise les fonctions usuelles.

---

**Exercice 3** (6 points)

Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \cos(x) \tag{E}$$

on cherche, sur $\mathbb{R}^+$, la solution $y(x)$ de $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. On note $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(x)$.

1. Quelle équation vérifie $Y(p)$ ? Calculer $Y(p)$.
2. Décomposer $Y(p)$ en éléments simples.
3. En déduire la valeur de $y(x)$.

---

**Exercice 4** (5 points)

On considère le système linéaire :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} p\,x & + & m\,y & + & p\,z & & & = & m \\ m\,x & & & + & m\,z & + & p\,t & = & 1 \\ p\,x & & & & & + & m\,t & = & 2 \\ m\,x & + & p\,y & + & m\,z & + & p\,t & = & 2m \end{array} \right.$$

où $x$, $y$, $z$ et $t$ sont les variables, $m$ et $p$ sont deux réels fixés.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $p$ le système admet-il une solution unique (*on ne demande pas de résoudre le système*) ?

Dans la suite, on suppose que $p = 0$, et on note $A$ la matrice associée au système.

2. Quel est le rang de $A$ suivant les valeurs de $m$ ?
3. Discuter et résoudre le système linéaire suivant les valeurs de $m$.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆