MVA101 - Corrigé du devoir n°4

Exercice 1

1°) Le graphe de la fonction f est représenté sur la *fig.1* ci-dessous :

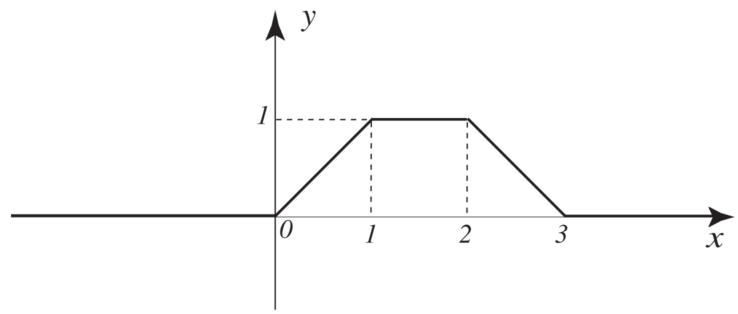

fig. 1

2°) Si $a > 0$, on a : $H(x-a) = 0$ si $x < a$, et $H(x-a) = 1$ si $x \geq a$.
On en déduit, pour $0 \leq a < b$:
$H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
D'où : $h_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,
$h_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et :
$h_3(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
La fonction f est donc simplement : $\boxed{f(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x)}$

3°) Si on note $F(p), H_1(p), H_2(p)$ et $H_3(p)$ les transformées de $f(x), h_1(x), h_2(x)$ et $h_3(x)$, elles vérifient : $F(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$.
Or (en appliquant le théorème du retard) :
$h_1(x) = [H(x) - H(x-1)]x = xH(x) - (x-1)H(x-1) - H(x-1) \sqsupset \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{e^{-p}}{p^2} - \dfrac{e^{-p}}{p}$,
$h_2(x) = H(x-1) - H(x-2) \sqsupset \dfrac{e^{-p}}{p} - \dfrac{e^{-2p}}{p}$,
$h_3(x) = [H(x-2) - H(x-3)](3-x) = (x-3)H(x-3) - (x-2)H(x-2) + H(x-2) \sqsupset \dfrac{e^{-3p}}{p^2} - \dfrac{e^{-2p}}{p^2} + \dfrac{e^{-2p}}{p}$, ce qui donne :

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p} = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}) :$$

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p})}$$

(on pouvait aussi remarquer que :
$h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) = xH(x) - (x-1)H(x-1) - (x-2)H(x-2) + (x-3)H(x-3)$

Exercice 2

1°) On a : $y(x)H(x) \sqsupset Y(p)$, $y'(x)H(x) \sqsupset pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$ et
$y''(x)H(x) \sqsupset p(pY(p) - 1) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2$. D'autre part :
$xe^xH(x) \sqsupset \dfrac{1}{(p-1)^2}$.
On en déduit : $p^2Y(p) - p - 2 - 4pY(p) + 4 + 4Y(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$,

d'où l'équation vérifiée par $Y(p)$: $\boxed{(L) \quad (p^2 - 4p + 4)Y(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2} + p - 2}$

2°) L'équation (L) donne : $Y(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^2} + \dfrac{1}{p-2}$.

Pour revenir à l'original, on décompose la première fraction en éléments simples :

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^2} = \frac{a}{(p-1)^2} + \frac{b}{p-1} + \frac{c}{(p-2)^2} + \frac{d}{p-2}.$$

On a : $a = \left[\dfrac{1}{(p-2)^2}\right]_{p=1} = 1$, et : $c = \left[\dfrac{1}{(p-1)^2}\right]_{p=2} = 1$.
Pour b et d, on utilise $p = 0$:
$\dfrac{1}{4} = 1 - b + \dfrac{1}{4} - \dfrac{d}{2}$ et : $\lim\limits_{p\to+\infty}(pF(p)) = 0 = b + d$. D'où le système :

$\begin{cases} 2b + d = 2 \\ b + d = 0 \end{cases}$ La différence des deux équations donne : $b = 2$ et la deuxième équation donne alors : $d = -2$. Finalement, on a trouvé :

$F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{2}{p-1} + \dfrac{1}{(p-2)^2} - \dfrac{2}{p-2}$, et :

$$\boxed{Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p-1} + \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2}}$$

On en déduit : $y(x) = xe^x + 2e^x + xe^{2x} - e^{2x}$, ou encore (pour $x \geq 0$) :

$$\boxed{y(x) = (x+2)e^x + (x-1)e^{2x} \ (x \geq 0)}$$

3°) Pour $x \leq 0$, on peut recommencer en effectuant un changement de variable du type : $t = -x$.
Mais il est plus simple ici de vérifier, en calculant :
$y'(x) = (x + 2 + 1)e^x + (2x - 2 + 1)e^{2x} = (x + 3)e^x + (2x - 1)e^{2x}$
$y''(x) = (x + 3 + 1)e^x + (4x - 2 + 2)e^{2x} = (x + 4)e^x + 4xe^{2x}$, d'où :
$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) =$
$(x+4)e^x + 4xe^{2x} - 4\left((x+3)e^x + (2x-1)e^{2x}\right) + 4\left((x+2)e^x + (x-1)e^{2x}\right) =$
$(x + 4 - 4x - 12 + 4x + 8)e^x + (4x - 8x + 4 + 4x - 4)e^{2x} = xe^x$. Donc :

$$\boxed{y(x) \text{ vérifie l'équation } (E) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

(Remarque : on montre que si une équation différentielle est linéaire à coefficients constants, et si son second membre est (au moins) de type C^1 sur $\mathbb{R}$, alors la solution pour $x \geq 0$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 3

1°) Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} x'(t) \sqsupset pU(p) - x(0) = pU(p) - 2 \\ y'(t) \sqsupset pV(p) - y(0) = pV(p) - 2 \\ z'(t) \sqsupset pW(p) - z(0) = pW(p) - 1 \end{cases}$$

Le système différentiel donne alors :

$$\begin{cases} pU(p) - 2 = 3U(p) + V(p) - 2W(p) \\ pV(p) - 2 = 4U(p) + V(p) \\ pW(p) + 1 = -2U(p) + W(p) \end{cases}$$

On en déduit le système :

$$\boxed{\begin{cases} (p-3)U(p) - V(p) + 2W(p) = 2 \\ -4U(p) + (p-1)V(p) = 2 \\ 2U(p) + (p-1)W(p) = -1 \end{cases}}$$

2°) La somme $(L2) + 2(L3)$ donne la relation :$(p-1)V(p) + 2(p-1)W(p) = 0$, ou encore $V(p) = -2W(p)$ (avec $p \neq 1$).

En reportant dans $(L1)$, il reste le système : $\begin{cases} (p-3)U(p) + 4W(p) = 2 \\ 2U(p) + (p-1)W(p) = -1 \end{cases}$,

d'où (par élimination) les solutions :

$-2(L1) + (p-3)(L2)$ donne $(p^2 - 4p - 5)W(p) = -4 - (p-3)$, puis :

$W(p) = \dfrac{-p-1}{(p+1)(p-5)} = \dfrac{-1}{p-5}$ *(avec $p \neq -1$ et $p \neq 5$).*

De même, $(p-1)(E1) - 4(E2)$ donne $(p^2 - 4p - 5)U(p) = 2(p-1) + 4$, puis :

$U(p) = \dfrac{2(p+1)}{(p+1)(p-5)} = \dfrac{2}{p-5}$ *(avec $p \neq -1$ et $p \neq 5$).*

On a trouvé :

$$\boxed{U(p) = \frac{2}{p-5}\ ,\ V(p) = \frac{2}{p-5}\ ,\ W(p) = \frac{-1}{p-5}}$$

3°) On en déduit les solutions du système différentiel :

$$\boxed{x(t) = 2e^{5t}\ ,\ y(t) = 2e^{5t}\ ,\ z(t) = -e^{5t}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

gerard.cesaroni@cnam.fr