CNAM – *Paris* Septembre 2010

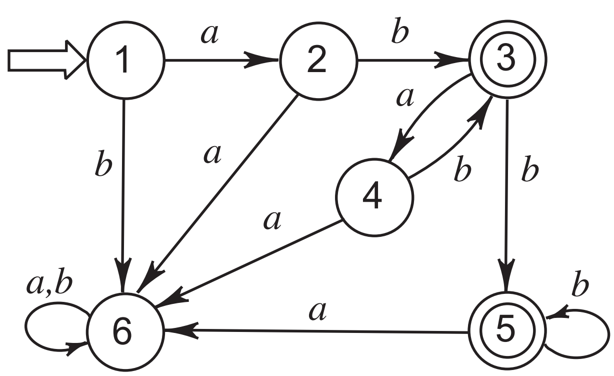
MVA004
Automates, codes, graphes et matrices

Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.
Les barèmes sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (7 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage de l'*automate fini déterministe* (AFD) $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2°) On note de D_1 à D_6 les langages du départ de $\mathcal{A}$.
Écrire le système du départ pour $\mathcal{A}$.

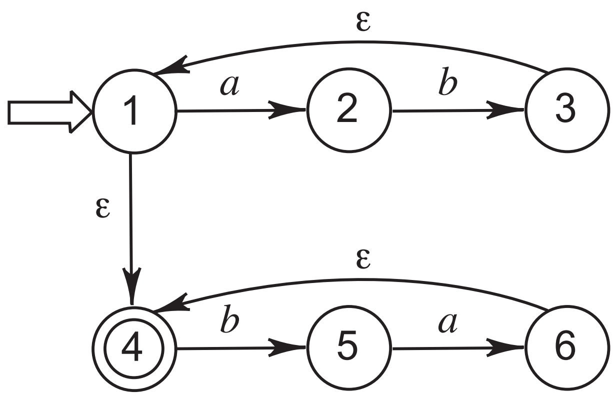
3°) Résoudre le système précédent, et en déduire une expression régulière pour le langage L.

4°) Comparer les langages D_1 à D_6.
En déduire le diagramme de l'automate minimal $\mathcal{B}$ qui accepte le langage L.

5°) Déduire de $\mathcal{B}$ le diagramme d'un *automate fini non-déterministe* (AFN) $\mathcal{C}$ qui accepte le langage L, et qui comporte moins d'états que $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (7 points)

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, soit l'*automate fini non-déterministe* ($AFN - \varepsilon$) $\mathcal{A}$, défini par le diagramme suivant :



On note L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2°) Écrire la matrice des transitions de $\mathcal{A}$.

3°) En déduire la matrice des transitions et le diagramme d'un automate déterministe $\mathcal{B}$ *(le « déterminisé » de $\mathcal{A}$)* qui reconnaît aussi le langage L.

4°) Écrire le système du départ pour $\mathcal{B}$, et le résoudre.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

5°) Simplifier $\mathcal{B}$, et obtenir l'automate minimal $\mathcal{C}$ qui accepte le langage L.

Exercice 3 (7 points)

Un code linéaire est défini par la matrice génératrice :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1°) Quelles sont la dimension k et la longueur n du code ?
Écrire la matrice de parité P du code. À quoi voit-on que ce code est correcteur ?

2°) Écrire la liste des mots de code, et en déduire la distance minimale d.
Ce code est-il parfait ? Est-ce un code de Hamming ?

3°) On reçoit les messages suivants :
$m_1 = 1010101, m_2 = 0101010$ et $m_3 = 1111111$.
Donner, sous forme de table, les ensembles de vecteurs d'erreur $\Gamma(m_1)$, $\Gamma(m_2)$ et $\Gamma(m_3)$.

4°) En déduire les corrections possibles de chacun des messages reçus.

5°) Le canal binaire est supposé symétrique, sans mémoire, et on note p sa probabilité d'erreur.
Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant le message m_1 ?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆