CNAM – *Paris* Juillet 2010

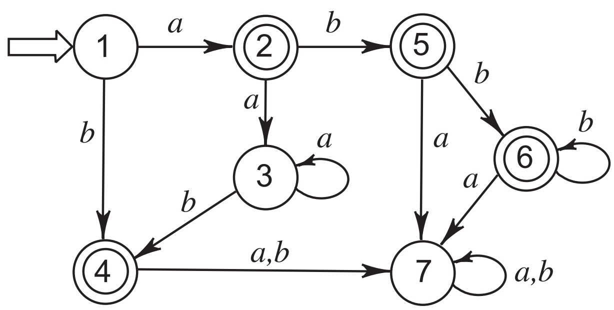
MVA004
Automates, codes, graphes et matrices

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.
Les barèmes sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (8 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage de l'*automate fini déterministe* (AFD) $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2°) On note de D_1 à D_7 les langages du départ de $\mathcal{A}$.
Écrire le système du départ pour $\mathcal{A}$.

3°) Résoudre complètement le système précédent, en donnant une expression pour chacun des langages D_1 à D_7.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

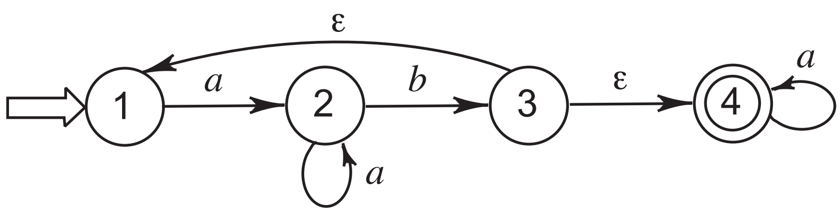
4°) Donner, sous forme de table, les mots de longueur inférieure ou égale à 3 pour chacun des langages D_1 à D_7.

5°) En déduire le diagramme de l'automate minimal $\mathcal{B}$ qui accepte le langage L.

6°) Déduire de $\mathcal{B}$ le diagramme d'un *automate fini non-déterministe* (AFN) $\mathcal{C}$ qui accepte le langage L, et qui comporte moins d'états que $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (7 points)

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, soit l'*automate fini non-déterministe* $(AFN-\varepsilon)$ $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



On note L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 3.

2°) Écrire la matrice des transitions de $\mathcal{A}$.

3°) En déduire la matrice des transitions et le diagramme d'un automate déterministe $\mathcal{B}$ *(le « déterminisé » de $\mathcal{A}$)* qui reconnaît aussi le langage L.

4°) Écrire le système du départ pour $\mathcal{B}$, et le résoudre.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

5°) En comparant les langages du départ de $\mathcal{B}$, montrer que l'automate $\mathcal{B}$ est minimal.

Exercice 3 (7 points)

On note $\bar{b}$ le conjugué du bit b, et on code les blocs de trois bits de la façon suivante : le bloc $b_1b_2b_3$ est codé $b_1b_2b_3c_1c_2c_3$, où : $c_1 = \bar{b_2} \oplus \bar{b_3}$, $c_2 = \bar{b_3} \oplus \bar{b_1}$ et $c_3 = \bar{b_1} \oplus \bar{b_2}$.

1°) Montrer que ce code est linéaire. Écrire sa matrice génératrice G.

2°) Écrire la liste des mots de code.
Déterminer la distance minimale d. Ce code est-il parfait ?

3°) On reçoit les messages suivants :
$m_1 = 101110$ et $m_2 = 111111$.
Donner, sous forme de table, les ensembles de vecteurs d'erreur $\Gamma(m_1)$ et $\Gamma(m_2)$.

4°) En déduire les corrections possibles pour m_1 et m_2.

5°) Le canal binaire est supposé symétrique, sans mémoire, et on note p sa probabilité d'erreur. Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant m_1 ?

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆