MVA101 - Corrigé du devoir n°3

Exercice 1

On avait noté dans le texte log *au lieu de* ln. *Cela ne change rien au principe il y a simplement un facteur* ln(10) *en plus ou en moins selon les rédactions.*
Si on pose :

$$f(x) = (x-1)\ln(1+x)$$

1. Puisque le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$ est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

celui de $xln(1+x)$ est :

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n-1} + \cdots$$

par différence des deux expressions précédentes :

$$\begin{array}{cccccccccc} f(x) = & & & x^2 & - & \frac{x^3}{2} & + & \cdots & + & (-1)^n \frac{x^n}{n-1} & + & \cdots \\ & - & x & + \frac{x^2}{2} & - & \frac{x^3}{3} & + & \cdots & + & (-1)^n \frac{x^n}{n} & + & \cdots \\ = & - & x & + \frac{3x^2}{2} & - & \frac{5x^3}{6} & + & \cdots & + & (-1)^n \big[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\big] x^n & + & \cdots \end{array}$$

2. Comme $g(x) = (x-1)\ln(1+x) - (1+x)\ln(1-x) = f(x) + f(-x)$ son développement en série entière, au voisinage de 0 est :

$$\begin{array}{ccccccccccc} g(x) = & - & x & + & \frac{3x^2}{2} & - & \frac{5x^3}{6} & + & \cdots & + & (-1)^n\big[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\big]x^n & + & \cdots \\ & - & (-x) & + & \frac{3x^2}{2} & - & \frac{5(-x)^3}{6} & + & \cdots & + & (-1)^n\big[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\big](-x)^n & + & \cdots \\ = & & & & 3x^2 & & & + & \cdots & + & \big[(-1)^n + 1\big]\big[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\big]x^n & + & \cdots \end{array}$$

La forme du terme général $a_n x^n = \big[(-1)^n + 1\big]\big[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\big]x^n$ de cette série dépend de la parité de n.

▷ Si $n = 2p$, alors $a_{2p}x^{2p} = \big[(-1)^{2p} + 1\big]\big[\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p-1}\big]x^{2p} = 2\big[\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p-1}\big]x^{2p}$

▷ Si $n = 2p+1$, alors $a_{2p+1}x^{2p+1} = 0$

on en déduit :

$$g(x) = \sum_{p \geqslant 1} \frac{4p-1}{p(2p-1)} x^{2p}$$

3. Pour obtenir le rayon de convergence de la série précédente, on applique le critère de d'Alembert à la série des valeurs absolues, on doit donc calculer :

$$\lim_{p\to+\infty} \Big|\frac{4(p+1)-1}{(p+1)(2(p+1)-1)}\Big|\Big|\frac{p(2p-1)}{4p-1}\Big|\big|x^2\big| = \lim_{p\to+\infty} \frac{8p^3}{8p^3}\big|x^2\big| = \big|x^2\big|$$

On en déduit que pour que la série converge, il faut : $\big|x^2\big| < 1$, c'est-à-dire que le rayon de convergence R de la série est $R = 1$.

4. Si $x = 1$, la série devient la série à termes positifs :

$$\sum_{p \geqslant 1} \frac{4p - 1}{p(2p - 1)}$$

dont le terme général est équivalent en plus l'infini à $\frac{2}{p}$, terme général d'une multiple de la série harmonique divergente. Si $x = 1$, la série diverge.

5. Si $x = i$ la série devient la série alternée :

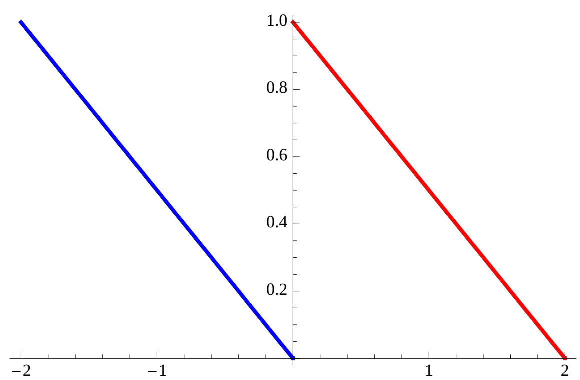
$$\sum_{p \geqslant 1} \frac{4p - 1}{p(2p - 1)}(-1)^p$$

dont le terme général est de la forme $(-1)^p v_p$ pour tout $p > 0$. $v_p = \frac{4p - 1}{p(2p - 1)}$ est positif et tend vers 0 en décroissant (il suffit pour s'en convaincre de vérifier que la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{4x - 1}{x(2x - 1)}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}^+$).
Par le théorème sur les séries alternées, la série converge si $x = i$.

Exercice 2

Soit f la fonction périodique de période $T = 2$ telle que $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ pour $x \in [0, 2[$.

1. Le graphe de f sur l'intervalle $[-2, 2]$ est donné par :



2. On peut calculer son coefficient de Fourier a_0 (moyenne de f sur un intervalle d'amplitude une période) en prenant l'intégrale de la définition, ou en remarquant qu'il s'agit de la moitié de l'aire du triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Dans les deux cas on trouve :

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1 \times 2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

Pour calculer les coefficients de Fourier b_n on écrit : $b_n = \frac{2}{T}\int_{\Delta T} f(x)\sin(n\omega x)dx$ où :

- T est la période, ici : $T = 2$
- ΔT est un intervalle d'amplitude la période, ici on prend : $\Delta T = [0, 2]$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation, ici : $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$

On a donc :

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{x}{2} + 1\right)\sin(n\pi x)dx$$

Il faut faire une intégration par parties, pour cela on pose, pour $n \neq 0$:

$$u(x) = -\frac{x}{2} + 1 \qquad\qquad v'(x) = \sin(n\pi x)$$
$$u'(x) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad v(x) = \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}$$

on en déduit :

$$b_n = \Big[-\big(-\frac{x}{2} + 1 \big) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx$$

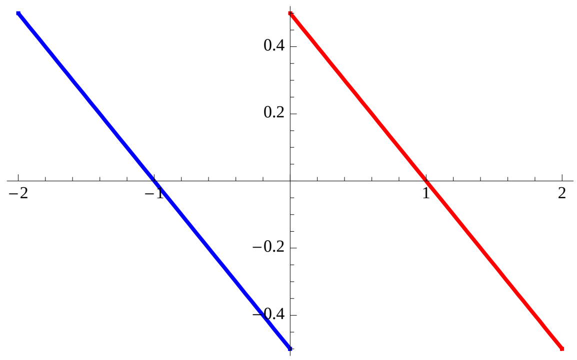
c'est-à-dire :

$$b_n = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \Big[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big]_0^2 = \frac{1}{n\pi}$$

3. En admettant que $a_n = 0$ quand $n > 0$, on en déduit que la série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$$

4. Le graphe de la fonction $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ est évidemment donné par :



$$S_g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} - \frac{1}{2} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$$

5. La formule de Bessel-Parseval appliquée à f s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_{\Delta T} |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Dans notre cas :

$$\frac{1}{2} \int_0^2 |-\frac{x}{2} + 1|^2 dx = \big(\frac{1}{2}\big)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1}{n\pi}\big)^2$$

Comme :

$$\frac{1}{2} \int_0^2 |-\frac{x}{2} + 1|^2 dx = \frac{1}{2} \Big[\frac{-2}{3} \big(-\frac{x}{2} + 1 \big)^3 \Big]_0^2 = \frac{1}{3}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

d'où finalement, on retrouve que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \big) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3

On considère la série suivante, dans laquelle α désigne un nombre réel donné et t une variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{int}$$

1. Le terme général de cette série peut s'écrire :

$$\alpha^n e^{int} = (\alpha e^{it})^n$$

il s'agit donc d'une série géométrique qui converge si et seulement si :

$$\left|\alpha e^{it}\right| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$$

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que α est une de ces valeurs.

2. $\alpha^n \sin nt$ peut être considéré comme la partie imaginaire de $\alpha^n e^{int}$. On a choisi α de telle sorte que la série $\sum \alpha^n e^{int}$ soit convergente, sa somme est celle d'une série géométrique, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{int} = \frac{1}{1-\alpha e^{it}} = \frac{1}{1-\alpha(\cos(t)+i\sin(t))} = \frac{1-\alpha\cos(t)+i\alpha\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}$$

On en déduit

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sin nt = \frac{\alpha\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}$$

3. La fonction $s(t)$ est le quotient de fonctions continues, elle est continue sur son domaine de définition. Mais son dénominateur : $1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2$ ne s'annule jamais pour $|\alpha| < 1$ (en effet $\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha} > 1$), donc $s(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La série $\sum \alpha^n \sin nt$ est une série trigonométrique pour laquelle $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, puisque $a_n = 0$ et $b_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$, donc par le théorème 1 du cours, on peut en déduire que $s(t)$ est continue.

4. $s(t)$ est une fonction périodique de prériode 2π, en appliquant la formule du cours on a

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\Delta T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}\cos(nt)dt$$

et

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\Delta T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}\sin(nt)dt$$

de $s(t)$ sous forme d'intégrales.

5. Comme $s(t)$ est une fonction impaire, on a évidemment $a_n = 0$, et par les questions précédentes (étant donnée l'unicité des coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction) on a $b_n = \alpha^n$.

6. Comme les fonctions $\alpha^n \sin(nt)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet indique que pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $t = \dfrac{\pi}{4}$:

$$s\big(\frac{\pi}{4}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^n \sin\big(\frac{n\pi}{4}\big)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^n \sin\big(\frac{n\pi}{4}\big)$$

☆☆☆☆☆☆