CNAM – *Paris* février 2010

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie
Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

1. Soit I la matrice identité, résoudre $(A+I)X = 0$, quelle est la dimension du sous espace vectoriel noyau de $A+I$?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? Déduire alors de 1. la matrice de Jordan J associée à A.
3. Dans $\mathcal{E}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 l'endomorphisme f est défini par :
   $f(P(x)) = -P(x) + \frac{1}{2}(P(x+1) - P(x-1))$
   Montrer que A est la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B}$. Pour cela expliciter l' image par f de chacun des vecteurs de $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
4. Un vecteur de $\mathcal{E}$ ou polynôme $P(x)$ est noté $v = a + bx + cx^2 + dx^3$,soient les vecteurs $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = \frac{1}{2}x^2$ écrire dans $\mathcal{B}$ leur colonne V_1,V_2, V_3 .
5. On considère l'équation :
   $$(A+I)X = V_3$$
   dans laquelle X est l'inconnue.
   Déterminer une colonne V_4 solution telle que deux de ses quatre coefficients soient nuls.
6. Vérifier que les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) associés aux colonnes V_1,V_2, V_3 et V_4 forment une base .
   Expliciter la matrice représentative de f dans cette nouvelle base.
   Comment s' appelle la matrice représentative obtenue ainsi ?
7. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et préciser ce que représentent les constantes introduites dans la résolution.

Voir exercices 2 et 3 au verso

Exercice 2

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M, puis pour vérification calculer les produits MV_1 et MV_2 et en déduire les sous espaces propres de M associés aux valeurs propres λ_i (avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$)
2. Pourquoi M est-elle diagonalisable ?
   Soit Λ telle que $P^{-1}AP = \Lambda$ où Λ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux λ_i .
   Calculer Λ^n pour tout entier positif n.
   En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda^n$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} (M)^n$.
3. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ admettant dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ l'expression : $q(v) =^t XMX$, où $v = x_1e_1 + x_2e_2$
   Pourquoi la forme bilinéaire symétrique φ associée à q est-elle un produit scalaire ?
4. Déterminer une matrice orthogonale R (donc telle que ${}^tR = R^{-1}$) dont les colonnes sont des vecteurs propres qui diagonalisent la forme bilinéaire φ. Quelle est la matrice représentative de φ dans cette nouvelle base ?
   En déduire une expression de q comme somme deux carrés (en fonction de x_1 et x_2).
5. Déterminer une base orthonormée pour le produit scalaire φ (méthode au choix).

Exercice 3

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$.
   Soient les points $O = (0,0)$, $A = (3,1)$ et $B = (3,3)$ et T_1 le triangle OAB.
   Calculer $I_1 = \displaystyle\iint_{T_1} x\, dxdy$
2. Dans un repère orthonormé $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, on considère le champ de vecteur
   $\overrightarrow{V}(M) = (z - x - 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$ où M est le point de coordonnées (x, y, z)
   Calculer $div\overrightarrow{V}(M)$ et $\overrightarrow{Rot(V)}(M)$.
3. Soit le plan (P) d' équation $z = x - y$, déterminer $\overrightarrow{N(x,y)}$ le vecteur normal au plan pour la paramétrisation (x, y) . Que vaut $\overrightarrow{N(x,y)}.\overrightarrow{V(M)}$ en un point $M(x, y, x - y)$ du plan.
4. Soit T_2 le triangle du plan (P) délimité par $0 = (0,0,0)$, $C = (3,1,2)$ et $B = (3,3,0)$
   Ecrire F_2 le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ à travers la surface T_2 orientée par $\vec{n}(M)$ tel que $\vec{n}.\vec{k} > 0$, puis le calculer
   Vérifier que $F_2 = \displaystyle\iint_{T_1} (x + 1)\, dxdy$ en paramétrage (x, y)
5. Que vaut $J = \displaystyle\iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{V}(M))dxdydz$ où Ω est le solide pyramide de base OAB et de hauteur CA .
6. Quels flux à travers quelles surfaces représente $J - F_2$, expliciter ces surfaces ainsi que leur normale.