MVA101 - Devoir n°1

à rendre pour le mardi 4 novembre 2008

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir.

MVA101	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*)
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1

On considère la suite réelle définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \qquad u_0 = \frac{1}{2}$$

1. Montrer par récurrence que cette suite existe et est à termes strictement positifs.
2. On pose $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Trouver une relation entre deux termes consécutifs de la suite w_n. En déduire la limite de w_n et de v_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

A) On considère la suite définie par :

$$v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \qquad v_0 = 1$$

1. Étudier la fonction $f(x) = \sqrt{12+x}$ sur l'intervalle $[1, 4]$, puis démontrer que $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$ quand $1 \leqslant x \leqslant 4$.

   En déduire que v_n est strictement compris entre 1 et 4 .
2. Si $w_n = 4 - v_n$, démontrer que $w_{n+1} < \dfrac{1}{4} w_n$ pour tout n.
3. En déduire la limite de w_n , puis de v_n, quand n tend vers l'infini.

B) On considère la série entière : $v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots$

1. Déduire de la question A.1 que son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1.
2. (*facultative*) Démontrer que son rayon de convergence est exactement 1.

✯✯✯✯✯✯