MVA101

Analyse et Calcul Matriciel

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (? points)

La fonction $y(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 :

$$(S) \quad y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

On pose : $u(x) = (1+2x)\,y''(x) - 4(1+x)\,y'(x) + 4\,y(x)$ et on développe :

$$u(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

1. Calculer b_n en fonction des a_n. Expliciter b_n quand $0 \leqslant n \leqslant 2$.

On suppose dorénavant que $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+2x)\,y''(x) - 4(1+x)\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$$

2. Que peut-on en déduire pour b_n ?
3. Quand $a_0 = a_1 = 1$, que vaut a_n avec $n \geqslant 2$?
   En déduire $y(x)$ dans ce cas.
4. Si $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$, montrer par récurrence que $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
   En déduire $y(x)$ dans ce cas.
5. Donner une expression de $y(x)$ quand $a_0 = \alpha$ et $a_1 = \beta$.
   (on utilisera les résultats des deux questions précédentes et le fait que la solution générale de (E) est une combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes).
6. Déterminer le rayon de convergence de la série entière (S).

Exercice 2 (? points)

Soient $x(t),\ y(t),\ z(t)$, trois fonctions inconnues qui vérifient le système différentiel :

$$(D) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(0) = 8,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0$.

1. En écrivant la transformée de Laplace de chaque équation de ce système, et en notant $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, déterminer le système linéaire vérifié par $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$.
2. Résoudre ce système.
3. Décomposer $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ en éléments simples.
4. En déduire $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Exercice 3 (? points)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.
2. La matrice A est-elle inversible ? (on pourra faire un raisonnement par l'absurde utilisant la valeur trouvée pour A^5)
3. Comment sont liées A^n et A^{n+4} ?
4. Calculer $A^{60} + A^{30}$.

Exercice 4 (? points)

Soit $f(x) = 2\left|\sin \pi t\right| \cos \pi t$.

1. Quelle est la parité de f ?
   Représenter graphiquement f sur $[-1, +1]$ (on rappelle que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)
   Quelle est la plus petite période strictement positive de f ?
2. Pourquoi f est-elle développable en série de Fourier ?
3. Calculer les coefficients de Fourier. On pourra admettre que :
$$\int_0^1 \sin 2\pi t \, \cos n\pi t \, dt = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos n\pi - 1}{n^2 - 4}\right) & \text{quand } n \neq \pm 2 \\ 0 & \text{quand } n = \pm 2 \end{cases}$$
4. Quelle est la somme de la série de Fourier ?
5. En déduire $U = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 - 4}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆