***Important*** : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM **uniquement** dans le premier devoir que vous rendez.

| | |
|---|---|
| MVA101 | Devoir n° ... |
| Votre nom et prénom : ... | Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*) |
| Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*) | Nom de l'enseignant : ... |

# MVA101 - Devoir n°2

à rendre pour le *mardi 18 novembre 2008*

**Exercice 1** Soit la suite de fonctions $(f_n)$ , $(n \geqslant 1)$ définies pour $x \geqslant 0$ par :

- $f_n(x) = n^2 x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}$,
- $f_n(x) = -n^2 x + 2n$ pour $\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{n}$,
- $f_n(x) = 0$ pour $x \geqslant \dfrac{2}{n}$.

1°) Étudier les variations et dessiner les graphes des fonctions $f_1$ , $f_2$ et $f_3$.

2°) Déterminer la fonction limite $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ (convergence simple).

3°) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$, puis $A = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4°) Comparer $A$ et $B = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.
La suite $(f_n)$ converge-t-elle uniformément vers $f$ sur $[0;1]$ ?

5°) *[facultatif]* Montrer que la suite $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.

**Exercice 2** On considère 4 séries entières (définies par leurs termes généraux) :

$(S_1)$ : $u_n = x^n \sin\dfrac{1}{n}$ , $(S_2)$ : $u_n = x^n \ln n$,

$(S_3)$ : $u_n = \dfrac{n!}{n^n} x^n$ , $(S_4)$ : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n x^n$.

On note $R_i$ le rayon de convergence de la série $S_i$ :

1°) Déterminer les rayons de convergence $R_i$.

2°) Étudier la convergence de la série $S_i$ pour $x = \pm R_i$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit l'équation différentielle :

$$(E) \ : \quad x^2y''(x) + 4xy'(x) + (2+x^2)y(x) = 2$$

On cherche à déterminer la solution de $(E)$ développables en série entière :

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

1°) Écrire les relations que doivent vérifier les coefficients $a_n$ pour que $y(x)$ soit solution de $(E)$.

2°) Que vaut $a_1$ ? Plus généralement, que valent les $a_n$ pour $n$ impair ?

3°) Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue.

4°) Expliciter les coefficients $a_n$ pour $n = 2k$ $(k \geqslant 0)$.
Écrire la série $x^2y(x)$, et en déduire une expression de la solution $y(x)$ trouvée.

5°) *[facultatif]* Déterminer la solution générale de l'équation $(E)$ en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.
En déduire que la solution trouvée ci-dessus est la seule solution de $(E)$ qui soit développable en série entière au voisinage de $x = 0$.

☆☆☆☆☆☆