MVA101 - Corrigé du devoir n°5

Exercice 1

1°) La fonction $f(x) = e^{-|x|}$ est définie et continue pour tout x réel. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y)$ peut être calculée à l'aide de la *formule des cosinus de Fourier* :

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cos(2\pi xy)\,dx = \underbrace{2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos(2\pi xy)\,dx}_{\text{(par parité)}} = \underbrace{2\text{Re}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{2i\pi xy}\,dx\right)}_{\text{(formules d'Euler)}}.$$

Or : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{2i\pi xy}\,dx = \left[\frac{e^{-x}e^{2i\pi xy}}{2i\pi y-1}\right]_0^{+\infty}$, et : $e^{-x}e^{2i\pi xy} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
car $\left|e^{-x}e^{2i\pi xy}\right| = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{2i\pi xy}\,dx = \frac{1}{1-2i\pi y} = \underbrace{\frac{1+2i\pi y}{(1-2i\pi y)(1+2i\pi y)}}_{\text{(quantité conjuguée)}} = \frac{1+2i\pi y}{1+4\pi^2y^2}.$$

On a trouvé : $\boxed{\widehat{f}(y) = \dfrac{2}{1+4\pi^2y^2}}$

2°) Puisque la fonction $f(x)$ est paire, et égale à e^{-x} pour $x \geq 0$, sa dérivée $f'(x)$ est impaire, et elle vaut $-e^{-x}$ pour $x > 0$, et e^{x} pour $x < 0$.
On a donc $f'(0^+) = -1 \neq f'(0^-) = 1$ (par symétrie) : $f'(x)$ est continue par morceaux, donc la fonction $f(x)$ elle-même est *de classe C^1 par morceaux.*
D'autre part, elle vérifie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \underbrace{2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx}_{\text{(par parité)}} = -2\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{e}$.
(on dit que $f(x)$ est *absolument sommable*)
Donc on peut appliquer la *formule de réciprocité de Fourier* à $f(x)$, ce qui donne ici : $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ (car $f(x)$ est continue pour tout x réel).

On a trouvé : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f}$

3°) L'égalité précédente se traduit par : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Puisque $\widehat{f}(y)$ est une fonction paire, on peut calculer l'intégrale précédente en appliquant la *formule des cosinus de Fourier* :

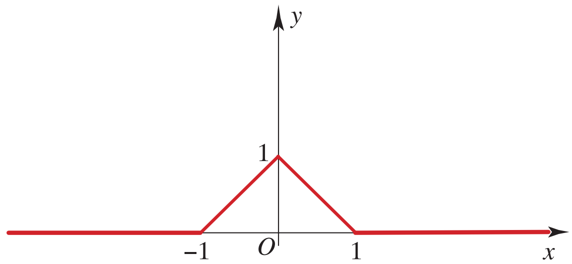
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi xy)}{1+4\pi^2y^2}\,dy = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt}_{\text{(en posant } t=2\pi y)}.$$

On en déduit : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

 gerard.cesaroni@cnam.fr

Exercice 2

1°) La fonction $g(x)$ est définie et continue pour tout x réel, et elle est nulle en dehors de l'intervalle $[-1;+1]$. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{g}(y)$ peut être calculée à l'aide de la formule des cosinus de Fourier :



$\widehat{g}(y) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} g(x)\cos(2\pi xy)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi xy)\,dx$, d'où, pour $y \neq 0$:

(par parité)

$$\widehat{g}(y) = \frac{2}{2\pi y}\left[(1-x)\sin(2\pi xy) - \frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi xy)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi y}\left(-\frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi y) + \frac{1}{2\pi y}\right)$$

(voir formulaire)[1]

$$= \frac{1}{2(\pi y)^2}(1-\cos(2\pi y)) = \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 \quad (y \neq 0).$$ D'autre part :

$(1-\cos(2a) = 2\sin^2(a))$

$$\widehat{g}(0) = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(on pouvait aussi dire que l'intégrale donne l'aire d'un triangle rectangle isocèle de coté 1)

La fonction $\left(\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2$ est continue pour tout $y \neq 0$. De plus, en utilisant $sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient : $\widehat{g}(y) = \left(\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 \underset{y\to 0}{\sim} \left(\dfrac{\pi y}{\pi y}\right)^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1 = \widehat{g}(0)$, ce qui montre que $\widehat{g}(y)$ est aussi continue pour $y = 0$. On a trouvé :

$$\boxed{\widehat{g}(y) \text{ est continue, et } \begin{cases} \widehat{g}(y) &= \left(\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 \quad \text{pour } y \neq 0 \\ \widehat{g}(0) &= 1 \end{cases}}$$

2°) La fonction $g(x)$ est continue pour tout x, et sa dérivée vaut : $g'(x) = 1$ pour $-1 < x < 0$, $g'(x) = -1$ pour $0 < x < 1$, et $g'(x) = 0$ pour $|x| > 1$ (elle n'est pas définie pour $x = 0$ et $x = \pm 1$).

Puisque $g'((-1)^-) = g'(1^+) = 0$, $g'((-1)^+) = g'(0^-) = 1$ et $g'(0^+) = g'(1^-) = -1$, $g'(x)$ est continue par morceaux, donc la fonction $g(x)$ est *de classe C^1 par morceaux.*

D'autre part : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1$ ($= \widehat{g}(0)$ déjà calculée).

On peut donc appliquer la *formule de réciprocité de Fourier* à $g(x)$, ce qui donne : $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g$ (car $g(x)$ est continue pour tout x).

On a trouvé : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g}$

[1] Ces formules sont valables pour tout complexe $\alpha \neq 0$:

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(P(x) - \frac{P'(x)}{\alpha} + \frac{P''(x)}{\alpha^2} - \frac{P'''(x)}{\alpha^3} + \dots\right) + C$$

$$\int P(x)\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(P(x)\sin(\alpha x) + \frac{P'(x)}{\alpha}\cos(\alpha x) - \frac{P''(x)}{\alpha^2}\sin(\alpha x) - \frac{P'''(x)}{\alpha^3}\cos(\alpha x) + \dots\right) + C$$

$$\int P(x)\sin(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(-P(x)\cos(\alpha x) + \frac{P'(x)}{\alpha}\sin(\alpha x) + \frac{P''(x)}{\alpha^2}\cos(\alpha x) - \frac{P'''(x)}{\alpha^3}\sin(\alpha x) - \dots\right) + C$$

3°) L'égalité précédente se traduit par : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

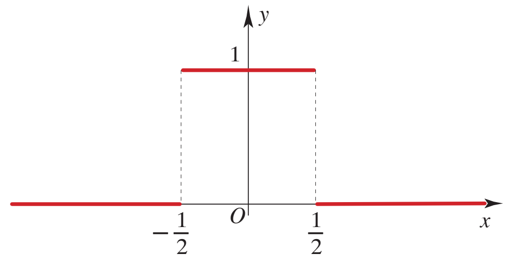
d'où, en particulier : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y)\,dy = g(0) = 1$.

En remplaçant $\widehat{g}(y)$ par sa valeur, puis en posant $t = \pi y$, cette égalité devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \frac{dt}{\pi} = 1, \text{ d'où : } \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \pi}$$

4°) La fonction $f(x)$ est un cas particulier des « fonctions créneaux » $\mathbb{1}_{[a;b]}(x)$ [2].

Calculons (une fois pour toutes) la transformée de Fourier $h_a(y) = \widehat{\mathbb{1}}_{[-a;+a]}(y)$ (avec $a > 0$), les autres s'en déduisant facilement par des translations et des homothéties.
La fonction étant paire, on a :



$h_a(y) = \displaystyle\int_{-a}^{+a} \cos(2\pi xy)\,dx = 2\int_0^a \cos(2\pi xy)\,dx$, d'où, pour $y \neq 0$:
(par parité)

$h_a(y) = 2\left[\dfrac{\sin(2\pi xy)}{2\pi y}\right]_0^a = \dfrac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} \quad (y \neq 0)$. D'autre part :

$h_a(0) = 2\displaystyle\int_0^a dx = 2a$ *(c'est l'aire d'un rectangle de cotés 2a et 1)*.On a trouvé :

$$\begin{cases} h_a(y) = \dfrac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} & \text{pour } y \neq 0 \\ h_a(0) = 2a \end{cases}$$

(on vérifie facilement que la fonction $h_a(y)$ est continue pour tout y)

On en déduit, en prenant $a = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\begin{cases} \widehat{f}(y) = \dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y} & \text{pour } y \neq 0 \\ \widehat{f}(0) = 1 \end{cases}}$$

Puisque $\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}(f))^2 = (\widehat{f})^2 = \widehat{g}$, les fonctions g et $f * f$ ont les mêmes transformées de Fourier. On en déduit : $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g$ (Cf. question 2°)). Or :

$(f * f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt = F\left(x + \frac{1}{2}\right) - F\left(x - \frac{1}{2}\right)$, en notant $F(x)$ une primitive de $f(x)$.

La fonction $F(x)$ étant continue [3] et dérivable par morceaux, on en tire :
$f * f$ est de classe C^1 par morceaux.
D'autre part, $f * f$ est à support compact comme f elle-même (elle est nulle en dehors d'un intervalle fini), ce qui assure l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |(f * f)(x)|\,dx$.

[2] La fonction créneau $\mathbb{1}_{[a;b]}(x)$ est définie par : $\begin{cases} \mathbb{1}_{[a;b]}(x) = 1 & \text{pour } a < x < b \\ \mathbb{1}_{[a;b]}(x) = 0 & \text{pour } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$

[3] Plus généralement, les primitives des « fonctions en escalier » sont toujours des fonctions continues

On peut donc appliquer aussi la *formule de réciprocité de Fourier* à $f * f$, ce qui donne : $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * f)) = f * f$, puisque $f * f$ est continue.

On en déduit : $\boxed{f * f = g}$

5°) La fonction g admettant une transformée de Fourier, et étant à support compact, on peut lui appliquer la *formule de Bessel-Parseval* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y)|^2 \, dy.$$

Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx = \underbrace{2\int_0^1 (1-x)^2 \, dx}_{\textit{(par parité)}} = -2\left[\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, et, d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y)|^2 \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^4 dy = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt}_{\textit{(en posant } t = \pi y\textit{)}}.$$

D'où, en égalant ces deux résultats : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt = \frac{2\pi}{3}}$