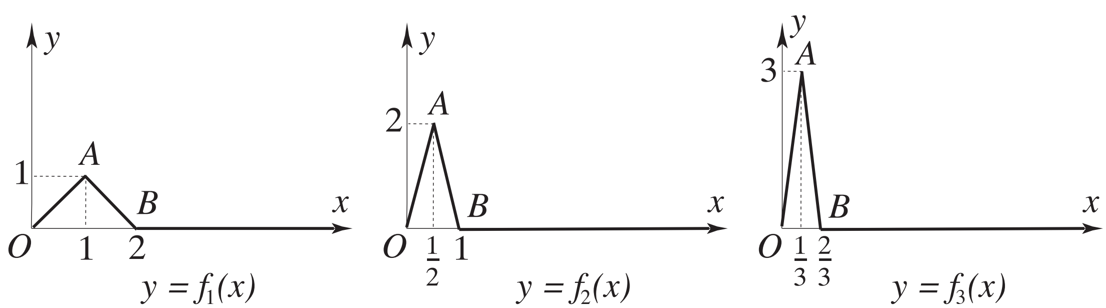
# MVA101 - Corrigé du devoir n°2

**Exercice 1**

1°) La fonction $f_1$ est définie par :
- $f_1(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$, qui donne le segment $OA$, avec $A(1,1)$,
- $f_1(x) = -x+2$ pour $1 \leq x \leq 2$, qui donne le segment $AB$, avec $B(2,0)$,
- $f_1(x) = 0$ pour $x \geq 2$, qui donne la demi-droite $Bx$.

De même pour la fonction $f_2$ :
- $f_2(x) = 4x$ pour $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, qui donne le segment $OA$, avec $A(\dfrac{1}{2}, 2)$,
- $f_2(x) = -4x+4$ pour $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$, qui donne le segment $AB$, avec $B(1,0)$,
- $f_2(x) = 0$ pour $x \geq 1$, qui donne la demi-droite $Bx$.

Enfin pour la fonction $f_3$ :
- $f_3(x) = 9x$ pour $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$, qui donne le segment $OA$, avec $A(\dfrac{1}{3}, 3)$,
- $f_3(x) = -9x+6$ pour $\dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$, qui donne le segment $AB$, avec $B(\frac{2}{3}, 0)$,
- $f_3(x) = 0$ pour $x \geq \dfrac{2}{3}$, qui donne la demi-droite $Bx$. D'où les graphes :




2°) Convergence simple sur $[0; +\infty[$ : on fixe $x \geq 0$, et on fait tendre $n$ vers $+\infty$.

∘ Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n$ (on est toujours sur le segment $OA$). Ce qui donne : $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

∘ Pour $x > 0$, la formule servant à calculer $f_n(x)$ dépend de $n$ (suivant que l'on est sur $OA$, sur $AB$ ou sur $Bx$). Mais, pour $n$ assez grand, la valeur de $f_n(x)$ sera prise sur $Bx$ : plus précisément, pour $x \geq \dfrac{2}{n}$, donc pour $n \geq \dfrac{2}{x}$, on a $f_n(x) = 0$. La suite $(f_n(x))$ est donc constante à partir d'un certain rang, d'où : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On a trouvé : $\boxed{f(x) = 0 \text{ pour tout } x \geq 0}$

3°) Calculs de $I_1$ , $I_2$ et $I_3$ :

∘ $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

∘ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x+4)\,dx = \left[2x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$= \dfrac{1}{2} - 2 + 4 + \dfrac{1}{2} - 2 = 1.$

∘ $I_3 = \displaystyle\int_0^1 f_3(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} 9x\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-9x+6)\,dx = \left[\frac{9x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{9x^2}{2}+6x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{1}{2} - 4 + 2 + \dfrac{1}{2} - 2 = 1.$

Plus généralement :

$\circ$ $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (-n^2x+2n)\,dx = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[-\frac{n^2x^2}{2} + 2nx\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$
$= \frac{1}{2} - 4 + 2 + \frac{1}{2} - 2 = 1.$

*( on pouvait aussi remarquer que pour $n > 1$, le calcul de $I_n$ revient au calcul de l'aire du triangle isocèle $OAB$, de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur $n$).*

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2} \text{ et } I_n = 1 \text{ pour } n \geq 2}$$

La suite $(I_n)$ est donc constante à partir de $n = 2$, d'où :

$$\boxed{A = \lim_{n\to+\infty} I_n = 1}$$

4°) Puisque $f(x)$ est la fonction nulle sur $[0;+\infty[$, on obtient :

$$\boxed{B = \int_0^1 f(x)\,dx = 0}$$

On a donc : $\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx \neq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$, ce qui montre (par l'absurde) que la convergence de la suite $(f_n)$ n'est pas uniforme sur $[0;1]$ :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } [0;1]}$$

5°) Pour $a > 0$ donné, notons $J_a = [a;+\infty[$. Pour examiner la convergence uniforme de la suite $(f_n)$ sur $J_a$, on étudie la suite :
$d_n = \sup_{x\in J_a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in J_a} |f_n(x)|$ (car $f(x)$ est nulle).
En raisonnant comme à la question 2°) (convergence simple de $(f_n)$), on obtient :
Pour $a \geq \frac{2}{n}$, donc pour $n \geq \frac{2}{a}$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $x \in J_a$, et donc $d_n = 0$. La suite $(d_n)$ est donc nulle à partir d'un certain rang, ce qui montre : $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout intervalle } [a;+\infty[\ ,\ (a > 0)}$$

**Exercice 2**

$(S_1)$ : $u_n = x^n \sin\frac{1}{n}$

On utilise l'équivalence : $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, d'où : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n}$.

Or, la série de terme général $v_n = -\frac{x^n}{n}$ est le développement en série entière de $\ln(1-x)$, qui a pour rayon de convergence $R = 1$ (comme la série géométrique dont elle est une des primitives). On en déduit : $\boxed{R_1 = 1}$

Pour $x = 1$, on utilise à nouveau : $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Comme la série harmonique $\Sigma\frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même pour $\Sigma \sin\frac{1}{n}$ :

$$\boxed{(S_1) \text{ diverge pour } x = 1}$$

Pour $x = -1$, on obtient le terme général $u_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$, qui n'est pas de signe constant.

On étudie donc la série $\Sigma|u_n| = \Sigma\left|\sin\frac{1}{n}\right| = \Sigma \sin\frac{1}{n}$ (car $\sin\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$)

Or cette série est divergente (Cf. ci-dessus), donc $(S_1)$ n'est pas absolument convergente.

Pour appliquer le théorème des séries alternées, on étudie la suite de terme général $a_n = \sin\dfrac{1}{n}$. On a :

- $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ (déjà vérifié),
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
- $(a_n)$ est décroissante (car, par exemple, la fonction $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ a une dérivée

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ qui est négative pour $0 \leq x \leq 1$).

La série $\Sigma(-1)^n a_n$ est donc convergente. Comme elle ne converge pas absolument, on en déduit :

$$\boxed{(S_1) \text{ est semi-convergente pour } x = -1}$$

$(S_2)$ : $u_n = x^n \ln n$

On peut utiliser le critère de D'Alembert :

Pour $x \neq 0$, on calcule $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}\ln(n+1)}{x^n \ln n}\right| = |x|\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$.

En écrivant $\ln(n+1) = \ln n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, on obtient :

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\left(1+\dfrac{1}{\ln n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$ : $(S_2)$ converge donc pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.

On en déduit : $\boxed{R_2 = 1}$

Pour $x = \pm 1$, on a $|u_n| = \ln n$ qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Ce qui entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, et donc que $(S_2)$ diverge.

$$\boxed{(S_2) \text{ diverge pour } x = \pm 1}$$

$(S_3)$ : $u_n = \dfrac{n!}{n^n}x^n$

On utilise à nouveau le critère de D'Alembert :

Pour $x \neq 0$, on calcule $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!x^n}\right| = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n |x|$.

La limite de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ s'évalue en calculant celle de son inverse :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n}$, en posant $a_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

On utilise le développement limité de $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \circ(u^2)$, au voisinage de $u = 0$, en posant $u = \dfrac{1}{n}$ : $a_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|x|}{e}$.

La série $(S_3)$ converge donc pour $\dfrac{|x|}{e} < 1$ et diverge pour $\dfrac{|x|}{e} > 1$.

On en déduit : $\boxed{R_3 = e}$

Pour $|x| = e$, le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure. On cherche un équivalent de $|u_n|$ en utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. On obtient :

$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n}e^n = \sqrt{2\pi n}$, qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Ce qui entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, et donc que $(S_3)$ diverge.

$$\boxed{(S_3) \text{ diverge pour } x = \pm e}$$

$(S_4)\ : u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

On utilise : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (Cf. ci-dessus) pour obtenir un équivalent de $|u_n|$ : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} e|x|^n$.

Or, la série de terme général $v_n = ex^n$ est le développement en série entière de $\frac{e}{1-x}$, qui a pour rayon de convergence $R = 1$ (série géométrique).

On en déduit : $\boxed{R_4 = 1}$

*(on pouvait aussi utiliser le critère de Cauchy)*

Pour $x = \pm 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = e$, ce qui entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, et donc que $(S_4)$ diverge.

$\boxed{(S_4) \text{ diverge pour } x = \pm 1}$

**Exercice 3** $(E)$ : $x^2y''(x) + 4xy'(x) + (2+x^2)y(x) = 2.$

1°) De $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, on déduit :
$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$, puis :
$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$. D'où, en reportant dans $(E)$ :

$$\left\{\begin{array}{rclllllll} 2y(x) & = & 2a_0 & +2a_1x & +2a_2x^2 & +\ 2a_3x^3 & + & \cdots + & 2a_nx^n \ + \cdots \\ x^2y(x) & = & & & a_0x^2 & +\ a_1x^3 & + & \cdots + & a_{n-2}x^n \ + \cdots \\ 4xy'(x) & = & & 4a_1x & +8a_2x^2 & +\ 12a_3x^3 & + & \cdots + & 4na_nx^n \ + \cdots \\ x^2y''(x) & = & & & 2a_2x^2 & +\ 6a_3x^3 & + & \cdots + & n(n-1)a_nx^n \ + \cdots \end{array}\right.$$

En identifiant, on obtient les relations :

$2a_0 = 2$, d'où $a_0 = 1$
$6a_1 = 0$, d'où $a_1 = 0$
$a_0 + 12a_2 = 0$
$a_1 + 20a_3 = 0$

Pour le terme général :
$a_{n-2} + (2+4n+n(n-1))a_n = 0$, qui donne :
$a_{n-2} + (n+1)(n+2)a_n = 0$.

Comme on peut le vérifier, cette dernière relation est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$.

$\boxed{a_{n-2} + (n+1)(n+2)a_n = 0 \text{ pour } n \geq 2}$

2°) On a aussi trouvé : $\boxed{a_1 = 0}$

On en déduit que $a_3 = 0$, puis que $a_5 = 0$ et, plus géneralement que tous les $a_n$ d'indice impair sont nuls :

$\boxed{a_{2k+1} = 0 \text{ pour } k \geq 0}$

3°) Pour les termes pairs, la relation trouvée à la question 1°) peut s'écrire, en posant $n = 2k+2$ : $a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+3)(2k+4)}$, valable pour $k \geq 0$.

Notons $v_k = a_{2k}x^{2k}$ le terme général de le série obtenue. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser le critère de D'Alembert :

Pour $x \neq 0$, on calcule $\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = \left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right| = \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+4)}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = 0$ pour tout $x$, ce qui montre que la série converge pour toutes les valeurs de $x$ :

$\boxed{\text{Le développement en série entière de } y(x) \text{ a un rayon infini}}$

4°) En examinant les premiers termes, il vient :
$a_0 = 1\ ,\ a_2 = -\dfrac{a_0}{12} = -\dfrac{1}{12} = -\dfrac{2}{4!}\ ,\ a_4 = -\dfrac{a_2}{5\times 6} = \dfrac{2}{4!\times 5\times 6} = \dfrac{2}{6!}\ ,\cdots$
Montrons, par récurrence sur $k$, la propriété :

$$(H_k)\ a_{2k} = \frac{2(-1)^k}{(2k+2)!}.$$

a) La propriété est vérifiée pour $k=1$ : $(H_1)$ est vraie.
b) Soit $k \geq 1$ tel que $(H_k)$ soit vraie, alors :
$a_{2k+2} = -\dfrac{a_{2k}}{(2k+3)(2k+4)} = -\dfrac{2(-1)^k}{(2k+2)!\times(2k+3)(2k+4)} = \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(2k+4)!}.$
On en déduit que $(H_{k+1})$ est vraie, ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{a_{2k} = \frac{2(-1)^k}{(2k+2)!} \text{ pour } k \geq 0}$$

La série $y(x)$ s'écrit donc :
$y(x) = 1 - 2\dfrac{x^2}{4!} + 2\dfrac{x^4}{6!} + \cdots + 2\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!} + \cdots$, ce qui donne pour la série $x^2y(x)$ :
$x^2y(x) = x^2 - 2\dfrac{x^4}{4!} + 2\dfrac{x^6}{6!} + \cdots + 2\dfrac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+2)!} + \cdots.$
Or, le développement en série entière de $\cos x$ s'écrit :
$cosx = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dfrac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{(2k+2)!} + \cdots.$
On en déduit que $x^2y(x) = 2(1-\cos x)$, d'où :

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{x^2}(1-\cos x) \text{ pour } x \neq 0\ ,\ y(0) = 1}$$

5°) Le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ donne les dérivées :
$y'(x) = \dfrac{u'(x)}{x^2} - 2\dfrac{u(x)}{x^3}$ et $y''(x) = \dfrac{u''(x)}{x^2} - 4\dfrac{u'(x)}{x^3} + 6\dfrac{u(x)}{x^4}$. L'équation $(E)$ devient :

$$(E1)\ :\quad x^2\left(\frac{u''(x)}{x^2} - 4\frac{u'(x)}{x^3} + 6\frac{u(x)}{x^4}\right) + 4x\left(\frac{u'(x)}{x^2} - 2\frac{u(x)}{x^3}\right) + (2+x^2)\left(\frac{u(x)}{x^2}\right) = 2,$$

$$(E1)\ :\quad u''(x) - 4\frac{u'(x)}{x} + 6\frac{u(x)}{x^2} + 4\frac{u'(x)}{x} - 8\frac{u(x)}{x^2} + 2\frac{u(x)}{x^2} + u(x) = 2,$$

$$(E1)\ :\quad u''(x) + u(x) = 2.$$

L'équation homogène associée à $(E1)$ est $(H)$ : $u''(x) + u(x) = 0$, qui a pour solution générale : $u_H(x) = a\cos x + b\sin x$ ($a$ et $b$ arbitraires).
Une solution particulière (évidente) de $(E1)$ étant $u_P(x) = 2$, on en déduit la solution générale de $(E1)$ : $u(x) = u_P(x) + u_H(x) = 2 + a\cos x + b\sin x$. D'où :

$$\boxed{\text{Solution générale de } (E)\ :\quad y(x) = \frac{2}{x^2} + a\frac{\cos x}{x^2} + b\frac{\sin x}{x^2} \quad (a \text{ et } b \text{ arbitraires})}$$

Pour que $y(x)$ soit développable en série entière au voisinage de $x=0$, il est nécessaire que $b=0$ et que la fonction $2 + a\cos x$ s'annule pour $x=0$, ce qui impose $a=-2$. Ce qui redonne bien la solution trouvée à la question 4°).

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆