CNAM – *Paris* Septembre 2009

MVA004
Automates, codes, graphes et matrices

Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

On code des blocs de trois bits de la façon suivante :
Le bloc $b_1b_2b_3$ est codé $b_1b_2b_3b_3b_2b_1c$, où le bit c est donné par : $c = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$.

1°) Montrer que ce code est linéaire. Écrire sa matrice génératrice G.

2°) Écrire la liste des mots de code.
Déterminer la distance minimale d. Ce code est-il parfait ? Est-ce un code de Hamming ?

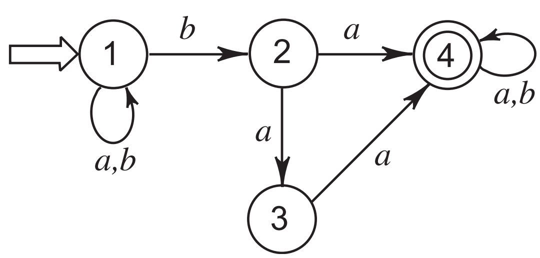
(suite au verso)

3°) On reçoit les messages suivants :
$m_1 = 1011011$ et $m_2 = 1010101$.
Donner, sous forme de table, les ensembles de vecteurs d'erreur $\Gamma(m_1)$ et $\Gamma(m_2)$.

4°) Le canal binaire est supposé symétrique, sans mémoire, et on note p sa probabilité d'erreur. Quelle est la probabilité de se tromper en corrigeant m_1 ?

Exercice 2 (6 points)

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, soit l'*automate fini non-déterministe* (AFN) $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 3.

2°) Écrire le système du départ pour $\mathcal{A}$, et le résoudre.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

3°) Écrire la matrice des transitions et le diagramme d'un automate déterministe $\mathcal{B}$ *(le « déterminisé » de* $\mathcal{A}$*)* qui reconnaît aussi le langage L.

4°) Simplifier l'automate $\mathcal{B}$: dessiner le diagramme de l'automate minimal $\mathcal{C}$ qui accepte le langage L.

Exercice 3 (8 points)

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, soient les *automates finis non-déterministes* (AFN) $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ définis par les diagrammes :

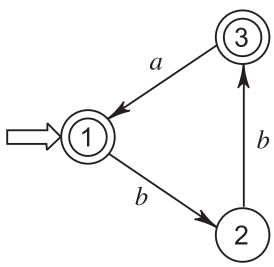


Diagramme de $\mathcal{A}_1$

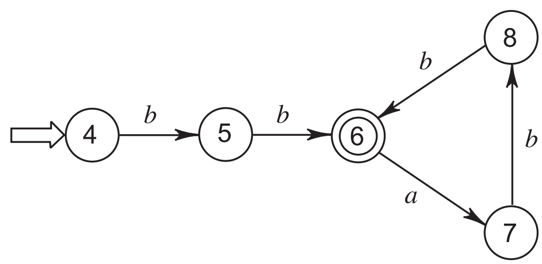


Diagramme de $\mathcal{A}_2$

On note L_1 et L_2 les langages reconnus (respectivement) par $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, et L leur réunion : $L = L_1 + L_2$.

1°) Déterminer les langages L_1 et L_2.

2°) Dessiner un automate fini non-déterministe (AFN) $\mathcal{A}$ qui accepte le langage L.

3°) Écrire la matrice des transitions et le diagramme d'un automate déterministe $\mathcal{B}$ *(le « déterminisé » de* $\mathcal{A}$*)* qui reconnaît aussi le langage L.

4°) Écrire le système du départ pour $\mathcal{B}$, et le résoudre.

5°) En comparant les résultats précédents, vérifier que $L_2 \subset L_1$.

☆☆☆☆☆☆