MVA004
Automates, codes, graphes et matrices

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

On considère le codage défini par les mots de code :

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

1°) Quelles sont la dimension k et la longueur n de ce code ?

2°) Vérifier que ce code est linéaire, et écrire sa matrice génératrice G.

3°) Écrire la matrice ${}^tH$, transposée de la matrice de contrôle.
Écrire la liste des syndromes.
[indication : pour compléter la liste, il faut examiner tous les messages de poids 2]

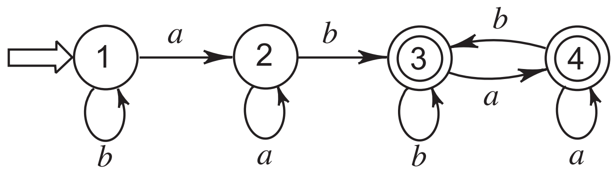
4°) On reçoit les messages $m_1 = 11010$, $m_2 = 10100$ et $m_3 = 11011$.
Calculer leurs syndromes, et donner toutes leurs corrections possibles.

5°) Donner la liste $\Gamma(m_1)$ des vecteurs d'erreur possibles pour m_1.

6°) On note p la probabilité d'erreur du canal (supposé symétrique et sans mémoire), et $q = 1 - p$. Exprimer, à l'aide de p et q, la probabilité que m_1 soit mal corrigé.

Exercice 2 (7 points)

L'alphabet étant $\Sigma = \{a, b\}$, on note L le langage de l'*automate fini déterministe* (AFD) $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



1°) Donner la liste des mots de L de longueur inférieure ou égale à 3.

2°) On note de D_1 à D_4 les langages du départ de $\mathcal{A}$.
Écrire le système du départ pour $\mathcal{A}$.

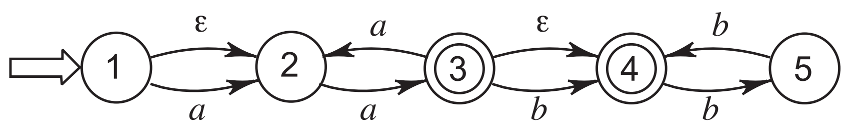
3°) Résoudre complètement le système précédent, en donnant une expression pour chacun des langages D_1 à D_4.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

4°) Donner, sous forme de table, les mots de longueur inférieure ou égale à 1 pour chacun des langages D_1 à D_4.

5°) En déduire le diagramme de l'automate minimal $\mathcal{B}$ qui accepte le langage L.

Exercice 3 (7 points)

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, soit l'*automate fini non-déterministe* $(AFN - \varepsilon)$ $\mathcal{A}$, défini par le diagramme :



On note L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

1°) Écrire la matrice des transitions de $\mathcal{A}$.

2°) En déduire la matrice des transitions et le diagramme d'un automate déterministe $\mathcal{B}$ *(le « déterminisé » de* $\mathcal{A}$*)* qui reconnaît aussi le langage L.

3°) Écrire le système du départ pour $\mathcal{B}$, et le résoudre.
En déduire une expression régulière pour le langage L.

4°) En comparant les langages du départ de $\mathcal{B}$, montrer que l'automate $\mathcal{B}$ est minimal.

5°) Dessiner un automate non-déterministe $\mathcal{C}$, qui accepte le langage L, et qui contient moins d'états que $\mathcal{B}$.

☆☆☆☆☆☆