CNAM – Paris Juin 2009

MVA010

Bases de l'analyse mathématiques

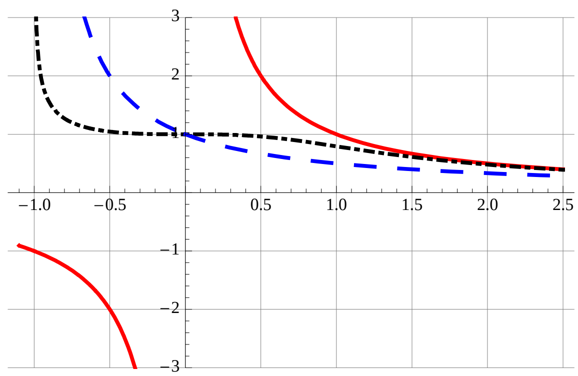
Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (9 Points)

La figure $(\mathcal{F})$ ci-dessous donne les représentations graphiques sur $]-1,+\infty[$ des trois fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \qquad h(x) = \frac{1}{1+x}$$



(a) Identifier les trois représentations graphiques, puis comparer les trois fonctions sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 2]$.

(b) Calculer :

$$I = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x} dx \qquad J = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x} dx$$

(c) Soit :

$$K = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$$

Sans calculer cette intégrale, déduire des questions précédentes deux constantes m et M positives telles que :

$$m \leqslant K \leqslant M$$

(d) Compléter la figure $(\mathcal{F})$ en traçant la courbe représentative de la fonction de $u(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, et en représentant le domaine :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } u(x) \leqslant y \leqslant -u(x)\}$$

(e) Sans calculer d'intégrale, déterminer l'aire de (D).

(f) Si l'unité choisie sur les deux axes est le centimètre, donner un encadrement en cm^2 de la superficie de (D).

Exercice 2 (10 points)

On considère la fonction définie par $f(x) = \ln|e^x - 1|$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Etudier le signe de $u(x) = e^x - 1$ en fonction de x. En déduire une écriture de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, qui ne contient plus de valeur absolue.

(c) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes du domaine de définition.

(d) La fonction est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

(e) Calculer la dérivée de f, en déduire son tableau des variations.

(f) Pour quelle valeur x_0, la courbe représentative de f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Quelle est l'équation de la tangente à la courbe en ce point ?

(g) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote horizontale ?

(h) Donner l'allure de la courbe représentative de f (on admettra qu'elle admet la droite $y = x$ comme asymptote en plus l'infini).

Exercice 3 (5 points)

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'(x) + 5\,y(x) = 2 \qquad (E)$$

(a) Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.

(b) Déterminer la constante c telle que $y_p(x) = c$ soit une solution particulière de l'équation complète (E).

(c) En déduire la solution générale $y(x)$ de l'équation complète (E), puis celle qui vérifie la condition $y(0) = 2$.

(d) Soit $y(x)$ une solution quelconque de (E), déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$. Cette limite dépend-elle de la condition initiale $y(0)$?

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆