CNAM – *Paris* février 2009

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie
Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les colonnes :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

La matrice A représente, dans la base canonique, un endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
L' identité est représenté par la matrice I.

1. Résoudre $(A - 2I)X = 0$, en précisant le rang de $A - 2I$ et la dimension du noyau de $A - 2I$.
   En déduire la valeur propre multiple de A.
2. Calculer les produits AV_1 et AV_3 et donner une base (V_1, V_2, V_3) du sous espace propre relatif à la valeur propre.
3. On considère l'équation :
   $$(A - 2I)X = V_3$$
   dans laquelle X est l'inconnue.
   Déterminer une colonne V_4 solution telle que trois de ses quatre coefficients soient nuls.
4. Vérifier que les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) associés aux colonnes V_1, V_2, V_3 et V_4 forment une base .
   Expliciter P, la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3, v_4) et la matrice M représentative de f dans cette nouvelle base.
   Comment s' appelle la matrice M obtenue ainsi ?
5. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et préciser ce que représentent les constantes introduites dans la résolution.

Exercice 2

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ admettant dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ l'expression : $q(v) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$, où $v = x_1e_1 + x_2e_2$.

1. Déterminer la matrice symétrique M qui représente, dans la base $\mathcal{B}$, la forme bilinéaire symétrique φ associée à q.
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de M ? La forme bilinéaire symétrique φ est-elle un produit scalaire ?
3. Déterminer une matrice orthogonale R (donc telle que ${}^tR = R^{-1}$) dont les colonnes sont des vecteurs propres qui diagonalisent la forme quadratique q.Quelle est la matrice représentative de φ dans cette nouvelle base.
   En déduire une expression de q comme somme ou différence de carrés (en fonction de x_1 et x_2).
4. Déterminer une base orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique φ.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le triangle $\mathcal{T}$ dont le bord C est délimité par les droites d'équations :

$$y = 3 \qquad y = x \qquad y = -x$$

1. Dessiner le triangle $\mathcal{T}$,puis calculer I :
$$I = \iint_{\mathcal{T}} y\, dxdy$$
2. En tout point M de coordonnées (x, y) on considère le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = (y^2 + 2xy)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$.
   Calculer l'intégrale curviligne J circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ le long des côtés du triangle $\mathcal{T}$ parcouru dans le sens positif.
   Préciser le paramètre choisi pour chacun des côtés du triangle :
$$J = \oint_C (y^2 + 2xy)\, dx + x^2\, dy$$
3. Écrire la formule de Green et justifier la relation que l'on observe entre I et J.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆