CNAM – *Paris* avril 2009

MVA107
Algèbre linéaire et géométrie

Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, l'endomorphisme f est défini par :
$$f\big(P(x)\big) = 2P(x+1) - P'(x)$$
où P' est le polynôme dérivé de P.
Écrire A, la matrice représentative de f dans la base canonique. Pour cela expliciter l'image par f de chacun des vecteurs de $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.
Vérifier le résultat en calculant $f\big(P(x)\big)$ pour $P(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Vérifier que A admet une valeur propre triple. Déterminer le sous-espace propre et en donner une base.
3. Quelle est la matrice de Jordan J représentant f ?
4. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) telle que J soit la matrice représentative de l'endomorphisme f .
5. Déterminer la matrice e^{At} , puis résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 2

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ admettant dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ l'expression :
$q(v) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$, où $v = x_1e_1 + x_2e_2$.

1. Déterminer la matrice symétrique M qui représente, dans la base $\mathcal{B}$, la forme bilinéaire symétrique φ associée à q.
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de M ?
La forme bilinéaire symétrique φ est-elle un produit scalaire ?
3. Déterminer une matrice orthogonale R (donc telle que ${}^tR = R^{-1}$) dont les colonnes sont des vecteurs propres qui diagonalisent la forme quadratique q. Quelle est la matrice représentative de φ dans cette nouvelle base $\mathcal{B}$' ?
En déduire une expression de $q(v)$ comme somme ou différence de carrés (en fonction de x_1 et de x_2).
4. Déterminer une base $\mathcal{B}$" dans laquelle la matrice représentative de φ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont -1 et 1.
5. Déterminer un vecteur $v \neq 0$ tel que $q(v) = 0$.

Exercice 3

L'espace de dimension 3 est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
On note $\vec{V}$ le champ de vecteur qui associe au point M de coordonnées (x, y, z) le vecteur :

$$\vec{V}(M) = -y\,\vec{i} + (x+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

On note A le point de coordonnées $(a, b, 0)$, ainsi que H le point de coordonnées $(a, 0, 0)$ et C le point de coordonnées $(0, 0, c)$ où a, b et c sont des réels strictement positifs. Placer ces points dans le repère orthonormé lorsque $a = 1, b = 3, c = 4$.

1. Calculer $Rot\vec{V}$ et $div\vec{V}$.
   Le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire, d'un potentiel vecteur ?
2. Dans cette question $z = 0$, donc $\vec{V}(M) = -y\,\vec{i} + (x+1)\,\vec{j}$. Calculer :
   - I_1 la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OA parcouru de O vers A.
   - I_2 la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OH parcouru de O vers H.
   - I_3 la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment HA parcouru de H vers A.
3. Dans cette question $z = 0$, donc $\vec{V}(M) = -y\,\vec{i} + (x+1)\,\vec{j}$.
   Écrire la formule de Green appliquée au champ de vecteur $\vec{V}$ et au triangle OHA. En déduire une relation entre I_1, I_2, I_3 et la valeur de l'intégrale double sur le triangle.
4. On note Φ le flux du champ de vecteur $\vec{V}$ sortant des 4 faces triangulaires bord de la pyramide ayant pour sommets les points O, A, H, C.
   En utilisant la formule d'Ostrogradski, déterminer la valeur de Φ.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆