Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir que vous rendez.

MVA101	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*)
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

MVA101 - Corrigé du devoir n°6

Exercice 1

(a)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit pour tout $n \geq 4$, on a $N^n = N^3 N^{n-3} = 0N^{n-3} = 0$.
D'où $N^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

(b) Puisque les matrices I et N commutent, on peut développer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton:
Pour tout $n \geq 2$, $A^n = (I+N)^n = I^n + C_n^1 I^{n-1} N + C_n^2 I^{n-2} N^2$, les autres termes étant nuls d'après la question précédente.Il vient:

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

Le calcul précédent n'est valable que pour $n \geq 2$, mais la formule trouvée reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ comme on le vérifie aisément (Par convention, $A^0 = I$). En remplaçant les matrices par leurs valeurs, on obtient:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & n^2 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) En remplaçant les matrices A et B par leurs valeurs en fonction de I et N, on obtient:

$$AB = (I+N)(aI = bN = cN^2) = aI + (a+b)N + (b+c)N^2$$

Une solution de $AB = I$ est donc donnée par les égalités $a = 1; a+b = 0; b+c = 0$
On en déduit les valeurs $a = 1; b = -1; c = 1$ et la solution: $B = I - N + N^2$

(d) Cela montre que A est inversible, son inverse étant :

$$A^{-1} = I - N + N^2$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'unicité de l'inverse d'une matrice nous assure de l'unicité de la solution trouvée.

(e) Pour calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$, on peut procéder de la même manière que pour le calcul de A^n:
La matrice A^{-1} est de la forme $A^{-1} = I + M$, avec $M = N^2 - N$ On calcule les puissances de M:

$$M^2 = (N^2 - N)^2 = N^4 - 2N^3 + N^2 = N^2$$

$$M^3 = MM^2 = (N^2 - N)N^2 = N^4 - N^3 = 0$$

Les raisonnements et calculs faits pour N et A restent valables pour M et A^{-1}:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2$$

Ce qui donne, pour tout n entier naturel:

$$A^{-n} = I - nN + \frac{n(n+1)}{2}N^2$$

(f) Si on écrit la formule précédente sous la forme :

$$A^{-n} = I + (-n)N + \frac{(-n)(-n-1)}{2}N^2$$

on constate qu'il s'agit de la formule trouvée à la question 2, avec $-n$ à la place de n. On peut donc en conclure:

$$A^k = I + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2$$

pour tout k entier relatif.

Exercice 2

Utilisons la méthode du pivot de Gauss:

(a)

$$\begin{cases} \boxed{x} - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 7y - 6z = -10 \\ y + 6z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ \boxed{y} + 6z = 10 \\ 7y - 6z = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3-7L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+7z=13 \\ y+6z=10 \\ -48z=-80 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+7z=13 \\ y+6z=10 \\ \boxed{z}=\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_1-7L_3 \\ L_2-6L_3 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ y=0 \\ z=\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que cette solution satisfait le système initial.

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ x-2y+3z=0 \\ 3x+4y-5z=a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x}-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+4y-5z=a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=0 \\ 5y-7z=1 \\ 10y-14z=a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=0 \\ \boxed{y}-\frac{7}{5}z=\frac{1}{5} \\ 10y-14z=a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_1+2L_2 \\ L_2 \\ L_3-10L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{1}{5}z=\frac{2}{5} \\ y-\frac{7}{5}z=\frac{1}{5} \\ 0=a-2 \end{array} \right.$$

Discussion selon les valeurs du paramètre a:
Si $a \neq 2$, le système n'admet aucune solution.
Si $a=2$, le système admet une infinité de solutions qui ont toutes la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}z \\ y=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}z \end{array} \right.$$

(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x}+2y-mz=0 \\ x+my-2z=0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+2y-mz=0 \\ (m-2)y+(m-2)z=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y-mz=0 \\ (m-2)(y+z)=0 \end{array} \right.$$

Discussion selon les valeurs du paramètre m:

Si $m = 2$, le système a une infinité de solutions de la forme: $x = -2y + 2z)$
Si $m \neq 2$, le système a une infinité de solutions de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (2+m)z \\ y = -z \end{array} \right.$$